N° d'ordre : 104

THESE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

pour obtenir

LE DIPLOME de DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité : Génie Civil

par

Abo Bakr Ali NASSR

Ingénieur, Université d'AIN SHAMS, EGYPTE

INTRODUCTION DU FROTTEMENT SEC DANS LES PROBLEMES DE CONTACTS LARGES

Soutenue le 19 octobre 1983 devant la commission d'examen :

MM. J.C. MASO	PRESIDENT
J. LAFFITTE M. LORRAIN L. FAURE P. ASTRE B. LEROY	EXAMINATEURS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

NASSR Abo Bakr Ali : Introduction du frottement dans les problèmes de contacts larges. - 124 ff. - Génie Civil. INSA - Département de mécanique. - 1983 - N° d'ordre : 104.

RESUME

Le travail proposé concerne deux cas de contacts larges : une inclusion cylindrique insérée dans un milieu infini, cette dernière étant soumise à une charge (schématisation d'un palier sec) et dans le deuxième cas l'inclusion n'est pas chargée mais le milieu extérieur soumis à une traction monoaxiale (schématisation d'un granulat en génie civil).
Le frottement de Coulomb est pris en compte et on étudie la répartition des contraintes, l'étendue de la zone de contact, l'influence du frottement sur le critère de Von Mises. Certains résultats sont confrontés à l'expérience.

MOTS CLES

- contacts larges
- frottement de Coulomb
- Potentiels complexes
- Quadratisation partielle

JURY et date de soutenance : 19 octobre 1983

Président : J. C. MASO
Membres : J. LAFFITTE Laboratoire INSAT MECANIQUE
M. LORAIN
L. FAURE
P. ASTRE
B. LEROY

Dépot : à la bibliothèque Universitaire 64 exemplaires

N° d'ordre 1.04

THESE

présentée devant

L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

pour obtenir

LE DIPLOME de DOCTEUR-INGENIEUR

Spécialité : Génie Civil

par

Abo Bakr Ali NASSR

Ingénieur, Université d'AIN SHAMS, EGYPTE

INTRODUCTION DU FROTTEMENT SEC DANS LES PROBLEMES DE CONTACTS LARGES

Soutenue le 19 octobre 1983 devant la commission d'examen :

MM. J.C. MASO		PRESIDENT
J. LAFFITTE M. LORRAIN L. FAURE P. ASTRE B. LEROY	}	EXAMINATEURS

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION.	1
CHAPITRE I - ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES PROBLEMES DE CONTACTS.	5
I. - INTRODUCTION	6
II. - CONTACT DE HERTZ SANS FROTTEMENT	10
III. - CONTACTS LARGES	16
IV. - CONTACT DE HERTZ AVEC FROTTEMENT	20
CHAPITRE II - ETUDE STATIQUE DU CONTACT LARGE AVEC FROTTEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES	24
I. - INTRODUCTION	25
II. - NOTION SUR LES POTENTIELS COMPLEXES	26
III. - RELATION LIANT LES COMPOSANTS DU DEPLACEMENT	34
IV. - CONDITION AUX LIMITES	37
V. - EQUATION DE BASE	38
CHAPITRE III - RESOLUTION NUMERIQUE CONSEQUENCE SUR LES CRITERES DE VON MISES	43
I. - MODALISATION DU PROBLEME	44

PAGES

II. - APPROCHE DU PROBLEME 46
III. - LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE 51
IV.- LES VALEURS INITIALES 55
a - Estimation de l'angle α_2 55
b - Estimation de la constante a 56
c - Estimation de l'angle α_1 57
V. - CRITERES DE RESISTANCE ET DONNEES - RESULTATS 58
VI. - DONNEES - RESULTATS - COMMENTAIRE 61

CHAPITRE IV. - APPLICATION A UN PROBLEME DE MICRO-MECANIQUE DES MORTIERS ET BÉTONS 75

I. - PRESENTATION DU PROBLEME 76
II. - MODELISATION 78
III. - NOTATIONS ET HYPOTHESES 79
IV. - APPROCHE THEORIQUE 81
V. - CONDITION SUPPLEMENTAIRE 83
VI. - RESOLUTION NUMERIQUE APPROCHEE 85
VII. - RESULTATS ET CONCLUSION 89

CHAPITRE V. - ANALYSE EXPERIMENTALE 104

I. - INTRODUCTION 105
II. - DISPOSITIF DE MESURE 108
a - Méthode extensométrique 108
III. - RESULTATS 110

CONCLUSION 119

°°°

Cette étude a été effectuée dans le laboratoire de Génie Mécanique de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur MASO, du Département de Génie Civil de l'I.N.S.A. de Toulouse, pour avoir accepté de présider le jury de cette thèse.

Je rends hommage à Monsieur le Professeur Lafitte, Directeur du Département de Génie Mécanique de l'I.N.S.A. de Toulouse, qui m'a permis de mener à bien ces travaux et m'a toujours encouragé.

Je suis très reconnaissant à Monsieur le Professeur Lorrain du Département de Génie Civil pour sa participation au jury.

Mes remerciements vont également à Monsieur Faure, Directeur du Laboratoire de Transmissions Mécaniques au C.E.T.I.M., de Senlis, pour sa participation au jury.

Monsieur ASTRE, Maître Assistant à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse m'a été d'un soutien précieux et efficace tout au long de ce travail, qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus sincères pour cette aide.

Mes remerciements vont également à Monsieur LEROY, Assistant agrégé à l'U.P.S. de Toulouse.

Monsieur GUILLOT et Monsieur CARACCI ont contribué à la partie expérimentale et numérique de ce travail. Je tiens à leur témoigner de ma reconnaissance.

Enfin, je remercie très vivement tout le personnel de département de Mécanique de l'I.N.S.A. de Toulouse pour sa compréhension et son dévouement.

I N T R O D U C T I O N

La mécanique des solides (dans le sens où ceux-ci sont faiblement déformables) a pour but essentiel de déterminer l'état des contraintes et des déformations et d'en déduire suivant certains critères l'apparition de zones plastiques ou éventuellement la rupture. Ce point de vue longtemps développé n'est pas suffisant. En effet les éléments constitutifs d'une réalisation mécanique sont conçus pour qu'il n'apparaisse pas de zone fragile, ce type de calcul concerne le ou les volumes des parties de la réalisation et les méthodes théoriques ou numériques permettent actuellement d'aboutir à des résultats précis.

Toutefois, dans la plupart des cas les solides sont en contact ponctuel, linéique, surfacique de telle sorte que l'aspect "volume" devient secondaire vis à vis de l'aspect "surface". Ceci pour deux raisons :

l'une théorique, c'est le contact qui détermine en grande partie l'état des contraintes et des déformations dans le volume. Or il n'est pas possible actuellement de traiter

en toute généralité sans faire d'hypothèses très restrictives les phénomènes de contact d'un simple point de vue mathématique, en particulier à cause du problème de la dissipation due au frottement. A cet effet et c'est la seconde raison, on interpose un troisième corps (film d'huile en général) qui diminue la dissipation mais dont l'étude est spécifique vis à vis des volumes (bien qu'il y ait couplage). Les problèmes relatifs à la lubrification sont aujourd'hui assez bien cernés. Dans certains cas ce troisième corps (même en présence de lubrification) n'est pas un continu : la hauteur du film est de l'ordre des aspérités par exemple, ou bien en l'absence de lubrification le troisième corps est constitué par des débris d'usure provenant du mouvement relatif des deux pièces s'il existe. Peu d'études concernent cet aspect dans la mesure où le comportement de ces débris est mécaniquement difficile à examiner.

Les situations invoquées ne sont pas spécifiques des réalisations technologiques dues aux mécaniciens.

En effet, en dehors des structures purement métalliques la plupart des constructions de génie civil sont en béton (ou béton armé). Or le béton (mis à part les armatures) n'est pas un matériau homogène. On admet, en général, que c'est un milieu à deux phases : la première constituée par la pâte de Ciment et la seconde par l'ensemble des granulats enrobés dans la pâte. Il apparaît de ce fait un problème de contact entre la pâte et le granulat (sans lubrification cela s'entend). Farron [FA] et MASO [MA] ont mis en évidence deux cas :

a - le granulat est soudé ou partiellement soudé à la pâte,
b - le granulat n'est pas soudé à la pâte.

En fonction des deux situations le comportement (en particulier l'amorce de fissures) peut être radicalement différent.

Vue la répartition aléatoire des agrégats ainsi que la forme quelconque de ces derniers, il n'est pas possible de traiter globalement et rigoureusement le phénomène. On est ainsi conduit si l'on veut obtenir des résultats utilisables à formuler deux hypothèses.

1) Isoler un granulat sans tenir compte de l'influence des autres sur le comportement mécanique de ce dernier et de la pâte.

2) Admettre une géométrie simple du granulat en particulier l'assimiler soit à un cylindre soit à une sphère.

Des études récentes sur ce sujet ont eu lieu d'un point de vue théorique et expérimental en particulier par Lorrain [LO] (les cas (a) est relativement simple).

Ces considérations montrent que dans une certaine mesure, certains problèmes peuvent être envisagés de façon concomittante. Les mécaniciens désignent d'une façon impropre par "tribologie" la science mécanique qui s'occupe du troisième corps, et par extension des problèmes de contact entre deux solides. Le mot "tribologie" ne figure pas au dictionnaire "Larousse" on y trouve par contre le mot "tribométrie" qui signifie mesure du frottement (du grec triben : frottement). Or que ce soit en mécanique ou en génie civil, dans les problèmes que nous avons évoqués plus haut, en général, le frottement est négligé ceci pour deux raisons l'une d'ordre mathématique et qui est de loin la plus importante et sur laquelle nous reviendrons, la suivante est relative à un choix de loi de frottement.

L'objet de ce travail est donc d'étudier en tenant compte du frottement et en faisant certaines hypothèses, cer-

tains types de contact communs à la mécanique et au génie civil et voir comment la prise en compte de ces derniers peut modifier certains critères de résistance, cela d'un point de vue numérique et expérimental.

———

C H A P I T R E 1

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES PROBLEMES DE CONTACTS.

-

1. - INTRODUCTION.

2. - CONTACT DE HERTZ SANS FROTTEMENT.

3. - CONTACTS LARGES.

4. - CONTACT DE HERTZ AVEC FROTTEMENT.

CHAPITRE -1-

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE DES PROBLEMES DE CONTACTS.

-

1. - INTRODUCTION.

Bien que sur le plan physique il semble que le problème du contact entre deux corps forme un tout vis à vis des situations géométriques variées que l'on rencontre, on est conduit à deux cas :

- les contacts larges,
- les contacts étroits.

Le premier correspond à une géométrie initiale où les rayons de courbures des deux solides sont très voisins (en grandeur et en signe) voire égaux cas des granulats en génie civil. Dans le second cas (appelé encore contact hertzien) les rayons de courbures sont différents (en grandeur et même en signe). Cette distinction est d'ordre purement géométrique et il est bien évident que sur un plan logique comme le montre la figure ci-après, il ne peut qu' avoir continuité en fonction du paramètre ε entre contact large et contact étroit.
Cette synthèse n'a jusqu'à présent pu être réalisée bien que l'on puisse poser correctement le problème (les difficultés sont d'ordre numérique).

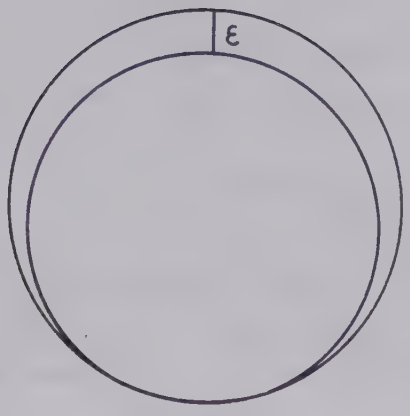


FIG 1

Nous ne nous attarderons pas sur cette question essentielle, toujours ouverte puisque nous ne nous intéresserons par la suite qu'à certains types de contacts larges.

Comme tous les auteurs nous supposerons que les matériaux sont tels que les déplacements et les déformations sont petits et que la loi de comportement est celle de l'élasticité classique (on étudie toutefois actuellement le cas viscoélastique). La résolution de tels problèmes est alors de déterminer la position et les dimensions de l'aire de contact, la répartition des contraintes radiales et tangentielles sur cette aire et éventuellement l'état des contraintes et des déformations dans le volume.

Si l'on a étudié dans ce cadre des problèmes très variés dont on pourra trouver une bibliographie dans /̄SO_/ c'est toujours en négligeant la dissipation due au frottement, la prise en compte de ce dernier soulève deux difficultés :

La première concerne le choix d'une loi de frottement. Dans la plupart des cas on utilise la loi de Colomb :

en désignant par $|\vec{\tau}|$ le module de la contrainte tangentielle et respectivement par $|\vec{\sigma}|$ le module de la contrainte normale alors en tout point de la zone de contact on a :

$$|\vec{\tau}| \leqslant f \ |\vec{\sigma}| \qquad \text{(f coefficient de frottement)}$$

Si $|\vec{\tau}| < f \ |\vec{\sigma}|$ le glissement est nul on dit qu'il y a adhérence et la zone où en tout point cette égalité est vérifiée, est appelée zone d'adhérence.

Si $|\vec{\tau}| = f \ |\vec{\sigma}|$ il y a glissement et la partie correspondante est appelée zone de glissement. Ces deux parties sont bien sur complémentaires. Certains auteurs utilisent aussi la loi $|\vec{\tau}| \leqslant g$ pour distinguer ces deux zones (dite loi de couche limite). Il n'y a pas lieu ici de discuter du mérite relatif de ces deux formulations dans la mesure où la première est une adaptation du schéma de Coulomb relatif au contact de solides indéformables et la seconde héritée d'un critère de plasticité (Tresca). Dans toute la suite nous utiliserons la loi de Coulomb comme la plupart des auteurs, car elle semble "a priori" plus logique.

La difficulté ne réside pas essentiellement dans le choix d'une loi de frottement mais est relative à un problème d'évolution. En effet, les zones d'adhérence et de glissement sont variables (ou évolutives) au cours du chargement et comme en placticité le paramètre temps (ou un paramètre équivalent) intervient même si l'on ne compare que l'état final à l'état initial. Comme en plasticité, pour tenir compte de cet aspect, on utilise une méthode incrémentale c'est à dire un schéma pas à pas dans le temps pour distinguer l'évolution de ces zones.

Bien qu'une méthode /GA/ soit basée sur cet algorithme elle ne paraît pas convaincante pour deux raisons.

Le processus numérique est-il convergent ? (dans

l'étude de l'auteur précédemment cité, le problème concerne le contact large de deux cylindres et la méthode des éléments finis est utilisée).

On utilise au cours d'un incrément les formules de Hertz sur lesquelles nous reviendrons et qui ne sont adaptées qu'à des contacts étroits.

Très récemment en plasticité /Su/ à travers les développements de l'analyse convexe propose une méthode différente purement mathématique mais non encore adaptée aux problèmes de contact.

Il faut signaler que les résultats numériques obtenus par Gaertner /GA/ sont dans certains cas erronés malgré le mérite et l'originalité de la méthode.

Dans l'état actuel on utilise donc les lois de Coulomb pour distinguer les zones d'adhérence et de glissement en se référant à l'état final. Ce point de vue est critiquable certes mais aucune théorie n'a jusqu'à ce jour amélioré le point de vue que nous suivrons.

En fait, la question utilitaire est la suivante : le frottement sec joue -t- il un rôle dans les problèmes de contacts ?

Que ce soit dans la résolution de certains problèmes théoriques ou bien dans l'observation expérimentale, il ne semble pas que l'état de la contrainte normale soit affecté notablement par l'introduction du frottement. Toutefois, et nous

le constaterons ce dernier peut modifier radicalement les points (ou les zones) où le seuil des critères classiques est atteint. Ceci constitue l'objet essentiel de cette étude.

2. - Contact de Hertz sans frottement (1881).

Historiquement, et sans doute pour des besoins technologiques, Hertz a été amené à étudier les problèmes des contacts. Bien que cette théorie conséquente du problème de Boussinesq soit dans une large mesure critiquable, elle est toujours utilisée aujourd'hui (avec des coefficients correctifs). Nous donnons ici les fondements de cette étude :

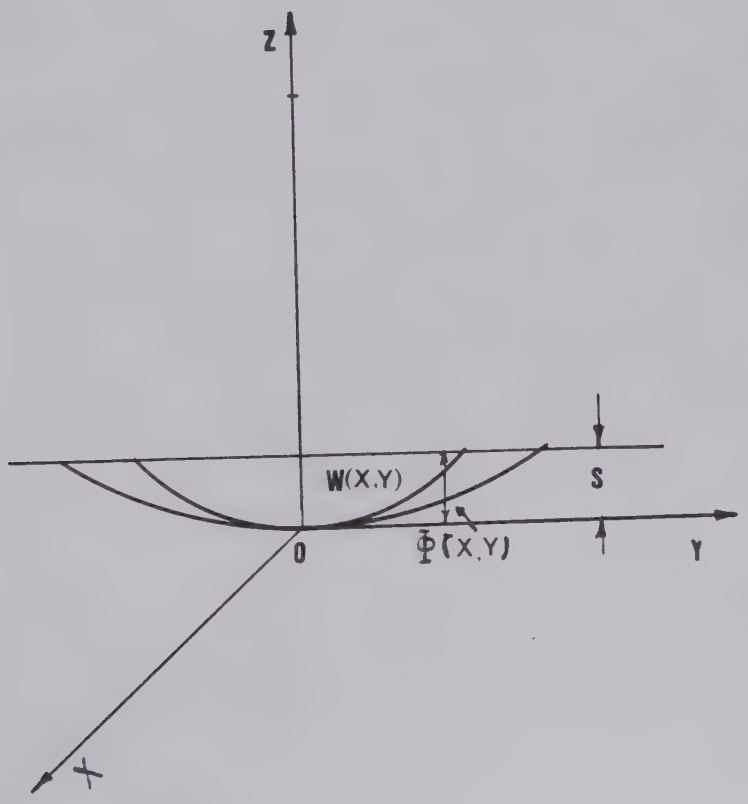


FIG 2

Considérons un massif élastique semi infini (1) et un poinçon rigide (2) qui sous l'effet d'une charge P pénètre dans le massif. Si l'on ne prend pas en compte le volume et si l'on ne retient que les inconnues relatives à la partie en contact ces derniers sont : "P" étant donné.

a - les efforts normaux et tangentiels sur la partie en contact,
b - les déplacements relatifs à la partie déformable,
c - l'étendue de la zone de contact.

Un tel problème n'est pas classique en élasticité, en particulier les données où les inconnues sont relatives à une frontière biendéterminée. On est donc amené à faire certaines hypothèses simplificatrices. La première consiste à ne pas prendre en considération les efforts tangentiels c'est à dire négliger le frottement. Cette hypothèse semble logique dans un premier stade.

D'autre part, on suppose que le déplacement w (x, y) est purement normal (confert figure). Cette hypothèse est restrictive et ne peut être acceptée que si la zone de contact est petite. En désignant par ϕ (x, y) = Z l'équation délimitant le poinçon supposée suffisamment régulière pour justifier les calculs qui suivent, et par S l'enfoncement ou la pénétration du poinçon (scalaire a priori inconnu) sous l'effet de la charge P on obtient à l'évidence la relation géométrique

$$w(x, y) = S - \phi(x, y)$$

On montre alors à l'aide de la théorie des potentiels ou bien à partir des résultats du problème de Boussinesq que la répartition P (x, y) des pressions sur la surface de contact vérifie l'équation intégrale.

$$\frac{1-\nu}{2\pi\mu} \iint_{\gamma} \frac{P(x', y')}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} dx' dy' = S - \phi(x, y)$$

ν est le coefficient de Poisson et μ le second coefficient de Lamé. Soulignons que la surface γ est inconnue aussi que S. On peut admettre vu la faible étendue du contact que $\Phi(x, y)$ est de la forme

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{R_1} + \frac{y^2}{R_2}\right)$$

Dans ces conditions la solution est donnée par

$$P(x, y) = \alpha \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

ou α, a, b sont des constantes que l'on détermine d'une part en fonction des R_1 et R_2 (c'est le cas pour a et b) et d'autre part en écrivant l'équilibre des forces (C'est le cas de α). On constate d'après la nature de la solution que la zone de contact est plane et limitée par une ellipse d'axes a et b ce qui détermine la frontière γ .

En ce qui concerne les problèmes bidimensionnels les calculs sont modifiés de la façon suivante : l'équation intégrale s'écrit :

$$-\frac{(1-\nu)}{\pi\mu} \int_{D} P(x') \log|x - x'| dx' = S - \Phi(x)$$

$$\Phi(x) = \frac{x^2}{2R^2}$$ (R rayon de courbure à l'origine du poinçon)

et l'on obtient

$$P(x) = \frac{2P}{\pi a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad a = 2\sqrt{\frac{PR(1-\nu^2)}{\pi E}}$$

Les formules théoriques obtenues sont en bon accord avec les résultats expérimentaux, ou bien vis à vis d'autres techniques en particulier la méthode des éléments finis [LOP].

Considérons à présent deux solides élastiques O et 1 initialement en contact au point O, leurs géométries respectives étant définies par ϕ_o et ϕ_1. A l'état déformé sous l'effort des charges les côtes respectives x_3^o et x_3^1 des points M_o et M_1 choisis alignés de telle sorte que M_oM_1 soit parallèle à $\vec{x}_3$ s'écrivent si l'aire de contact est petite :

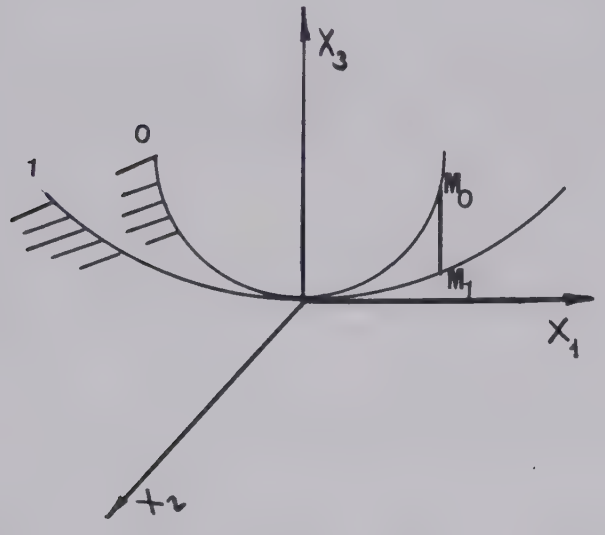


FIG 3

$$x_3^o = \phi^o + U_3^o + S$$

$$x_3^1 = \phi^1 + U_3^1$$

expressions dans lesquelles S représente la pénétration et U_3^o, U_3^1 les déplacements des solides. On a alors en tout point de contact

$$U_3^1 - U_3^o = S + \phi_o - \phi_1$$

Par analogie avec le problème précédent on peut écrire au voisinage du point O.

$$\phi_o = A_o x_1^2 + B_o x_2^2$$

$$\phi_1 = A_1 x_1^2 + B_1 x_2^2$$

En assimilant chaque solide à un demi espace élastique ce qui constitue une hypothèse tout à fait restrictive on obtient :

$$\frac{1-\nu_1^2}{\pi E_1} + \frac{1-\nu_o^2}{\pi E_o} \iint_\gamma \frac{P dx_1 . dx_2}{r} = S + (A_o - A_1) x_1^2 + (B_o - B_1) x_2^2$$

$$r = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ν_o, E_o (respectivement ν_1, E_1) sont les caractéristiques élastiques du solide O (respectivement 1) et $(A_o - A_1)$, $(B_o - B_1)$ sont des quantités $\geqslant 0$ et $S < 0$ (le signe + à l'intérieur du crochet provient du fait que l'on considère le demi espace O, de normale extérieure $-\vec{x}_3$).

Dans un cas particulier qui nous interessera essentiellement par la suite relatif au contact intérieur de deux cylindres suivant une génératrice de direction $\vec{x}_1$ on obtient :

$$P = - K \sqrt{1 - \frac{x_1^2}{b}} \quad , \qquad K = \frac{2P}{\pi b}$$

$$b = 2 \sqrt{\left(\frac{1-\nu_o^2}{\pi E_o} + \frac{1-\nu_o^2}{\pi E_1} \right) . P . \frac{R_1 R_o}{R_1 - R_o}}$$

P est la charge, R_o et R_1 les rayons des cylindres.

Les calculs précédents sont relativement simples, mais l'approche théorique introduit des hypothèses peu rigoureuses :

- Assimilation de chaque solide à un massif élastique,
- géométries particulières qui induisent une largeur de contact petite. On utilise toutefois ce formalisme pour une largeur de contact

$$2 b < \frac{R_o}{2} .$$

Le calcul de la pénétration S conduit à une intégrale divergente /¯CO_7.

On trouvera dans l'ouvrage de cet auteur d'autres types de géométrie (par exemple contact entre deux sphères) en utilisant les mêmes hypothèses.

Il existe encore de nombreux travaux relatifs aux problèmes de contact plans en particulier l'utilisation de la méthode des potentiels complexe /¯MI_7, /¯MU_7. Les questions abordées s'éloignent de notre problème et nous ne les exposerons pas.

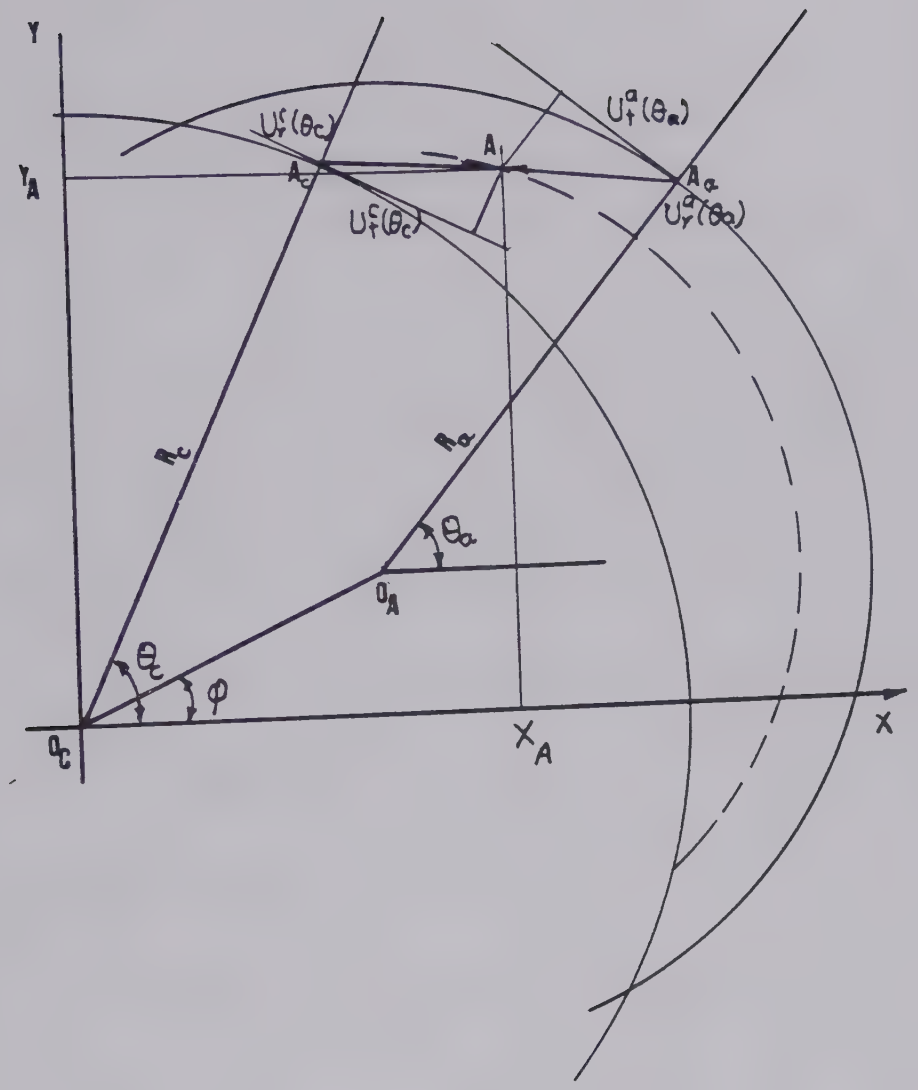
3. - CONTACTS LARGES.

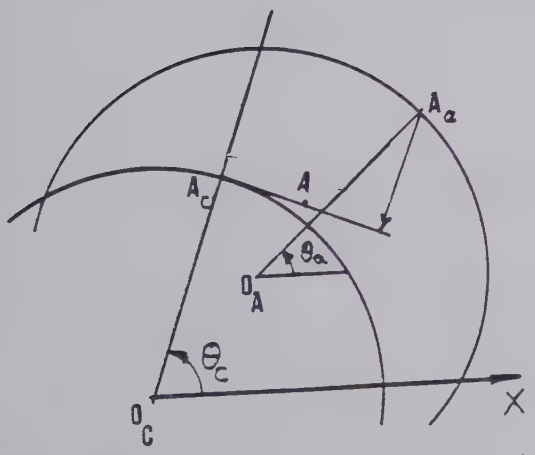
Rappelons que par contact large ou contact non hertzien on désigne classiquement le cas où les rayons de courbure des deux solides sont voisins (voire égaux) au point de contact ; il s'ensuit que l'aire de contact n'est pas nécessairement petite. Bien que dans la pratique cette géométrie se rencontre aussi fréquemment que celle relative aux contacts de Hertz en particulier en construction mécanique : ajustements, paliers, etc... et en génie civil comme nous l'avons souligné, peu de travaux anciens concernent les contacts larges. Ce n'est que cette dernière décennie que ce type de problème a été abordé (Notons toutefois que les problèmes relatifs aux cas des poinçons à base plane, eux ont été très étudiés à cause de leur importance en génie civil, ils relèvent du formalisme de Hertz et sont abondamment commentésdans la littérature classique).

Les différences essentielles concernent la relation liant les déplacements dans le cas hertzien le déplacement est supposée purement normal, cette hypothèse n'est plus recevable pour les contacts larges.

D'un point de vue pratique on n'envisage que deux géométries contact intérieur de deux cylindres avec un jeu faible et respectivement contact intérieur de deux sphères. Ce jeu peut être éventuellement nul (cas des agrégats en génie civil).

Considérons pour fixer les idées la géométrie arbre-coussinet, certains auteurs [KO] supposent que le déplacement tangentiel (sur la partie en contact est négligeable, Cette hypothèse n'est pas recevable surtout si l'on tient compte du frottement.


Y
Y_A
$U_r^c(\theta_c)$
$U_t^a(\theta_a)$
A_c
A
A_a
$U_t^c(\theta_c)$
$U_r^a(\theta_a)$
R_c
R_a
θ_a
O_A
θ_c
φ
O_C
X_A
X


A_a
A_c
A
θ_a
O_A
θ_c
O_C
X

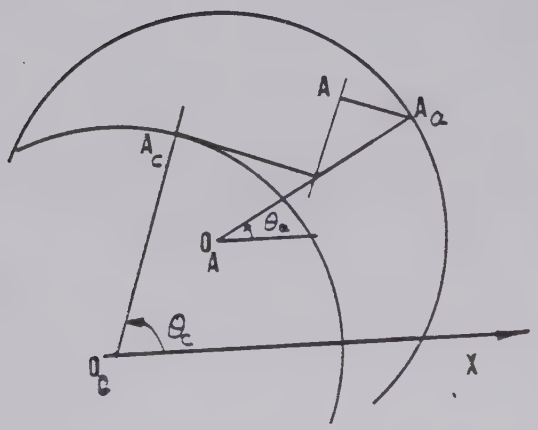

A
A_a
A_c
θ_a
O_A
θ_c
O_C
X

FIG 4

Un autre point de vue est dû à Villechaise [VI] : au cours de la déformation l'arbre vient occuper sans se déformer la position fictive qui correspond à un cercle (O_A, R_A), le Coussinet étant représenté par cercle (O_c, R_c). La déformation simultanée des deuxcorps entraîne que chaque point de l'arbre vient en coïncidence avec un point du coussinet.

La condition géométrique de contact proposée est :

$$\vec{O_c A_c} + \vec{A_c A} = \vec{O_c A_a} + \vec{A_a A}$$

qui s'explicite :

$$(a) \quad R_c + U_r^c(\theta_c) = \alpha \cos(\theta_c - \Phi) + (R_a + U_r^a(\theta_a)) \cos(\theta_c - \theta_a) + U_t^a(\theta_a) \sin(\theta_c - \theta_a)$$

$$(b) \quad U_t^c(\theta_c) = \alpha \sin(\Phi - \theta_c) + (R_a + U_r^a(\theta_a)) \sin(\theta_a - \theta_c) + U_t^a(\theta_a) \cos(\theta_c - \theta_a)$$

Ces relations sont illustrées sur les figures ci-dessus, avec

$\alpha = |\vec{O_c O_A}|$ lié au jeu et $\Phi = (\vec{O_x}, \vec{O_c O_A})$ appelé angle de calage.

U_r^a, U_t^a (respectivement U_r^c , U_t^c) sont les déplacements normaux et tangentiels du déplacement dans le système orthogonal construit sur O_cA_c. Ces deux conditions sont très difficiles à manipuler car elles font intervenir des angles θ_a et θ_c liés aux deux solides. Villechaise admet en plus que $\theta_a = \theta_c$ et ne reitent que la condition (a). Dans le cas où ϕ est égal à O (cas statique)

$$\alpha = \underbrace{\Delta R}_{\text{jeu}} + \underbrace{U_r^c(O) - U_r^a(O)}_{\text{pénétration}}$$

On retrouve alors la relation de Kohen [KO] ; cette approche n'est pas correcte car en supposant par exemple l'arbre rigide $U_r^a = U_t^a = O$ le système des équations (a) et (b) fournirait une valeur de U_r^c et de U_t^c autrement dit le déplacement serait connu (sur une zone inconnue) et par les voies classiques de l'élasticité on obtiendrait l'état des contraintes, ces dernières pouvant être incompatibles avec le problème physique.

Les techniques mathématiques utilisées sont basées sur la méthode des séries [SO] ou bien encore la méthode des équations intégrales par analogie avec le problème de Hertz ; dans ce dernier cas on est conduit à un calcul numérique en général long. Les résultats proposés par Kohen et Villechaise sont parfois erronés d'un simple point de vue physique (voir par exemple page 143 figure V-5 dans la thèse de Villechaise).

Nous reviendrons sur ces questions dans le chapitre qui suit.

.../...

4. - CONTACT DE HERTZ AVEC FROTTEMENT.

Il y a lieu si l'on prend en compte le frottement de distinguer deux cas ; le premier correspond à une situation statique : il n'y a pas de mouvement relatif entre les deux solides et un deuxième cas plus important en pratique où un mouvement relatif existe. Ces deux aspects vue leur importance ont été abordés depuis plusieurs années mais il ne semble pas qu'il existe actuellement une théorie unitaire. Nous résumons ici les résultats essentiels relatifs au cas statique.

A part certaines théories isolées et contestables, la seule voie générale pour traiter le problème du frottement est la méthode des éléments finis (utile par ailleurs en l'absence de frottement). Elle est souvent utilisée et très bien présentée par Gaertner [GA]. Nous ne reviendrons pas sur cette méthode basée sur les théories de l'énergie et les conséquences numériques qui en découlent [GE].

D'un point de vue général on aboutit au système matriciel $Kd = F$ où "K" est la matrice de rigidité, "d" le vecteur déplacement et "F" le vecteur force (les inconnues peuvent à la fois être des forces ou des déplacements). Dans le cas de deux solides en contact 1 et 2 il existe deux équations matricielles :

$$K_1 d_1 = F_1$$

$$K_2 d_2 = F 2$$

relative à chaque solide.

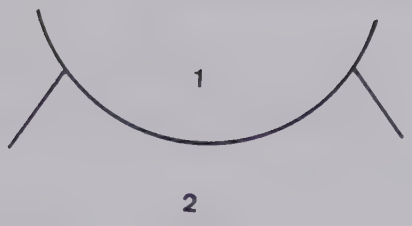


FIG 5

Le systèmeglobal ne peut être résolu faute de connaître à la fois l'étendue de la zone de contact (avec en plus la distinction des zones d'adhérence et de glissement si le frottement intervient) et la répartition des contraintes et des déplacements sur cette dernière.

On est donc conduit à la résolution du système

$$K_1 d_1 = F_1$$

$$K_2 d_2 = F_2$$

avec les "contraintes" suivantes :

a - Dans la zone de contact $F_1 = F_2$ et d_1 et d_2 sont liés par une relation géométrique traduisant le contact.

b - On distingue dans le cas du frottement les zones d'adhérence et de glissement à travers les lois de Coulomb.

c - Les résultats numériques ne sont admissibles que s'il n'y a pas interprétation des deux solides.

On est ainsi conduit à un traitement numérique avec des "contraintes" unilatérales et bilatérales avec en plus

l'ignorance des parties où ces contraintes s'exercent.

Cette méthode numérique a le mérite d'être générale mais elle présente de gros inconvénients.

a - Nécessité de gros moyens de calculs liés à la méthode des éléments finis en introduisant en plus des problèmes de liaisons, ce qui complique le contexte numérique.

b - La convergence du processus itératif n'a pu être justifiée.

c - La méthode deséléments finis altère en général le bord des domaines.

d - En ce qui nous concerne elle nécessite que le contact soit évolutif ; or pour les contacts larges la zone de contact évolue peu et le traitement numérique est alors imprécis (les résultats obtenus dans cette situation ne sont pas en général recevables).

C'est sans aucun doute ce dernier point qui justifie une analyse particulière plus rigoureuse, mais moins générale de notre problème.

Remarque : La méthode des éléments finis n'est pas une panacée. On utilise beaucoup moins fréquemment la théorie des équations intégrales. Cette technique présente un avantage considérable : elle ne fait intervenir que le bord du solide autrement dit elle diminue d'une dimension le problème physique. Cette constatation est essentielle en mécanique des contacts puisque "a priori" on ne s'occupe pas du volume.

Il ne semble pas toutefois qu'elle soit très en vogue

sans doute à cause de l'imprécision du calcul numérique de certaines intégrales singulières.

Certaines études sont en cours sur ce sujet à propos des problèmes du contact entre dents d'engrenages - par la méthode des équations intégrales.

.°.

C H A P I T R E II

ETUDE STATIQUE DU CONTACT LARGE AVEC FROTTEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES

-

1. - INTRODUCTION.

2. - NOTIONS SUR LES POTENTIELS COMPLEXES.

3. - RELATION LIANT LES COMPOSANTS DU DEPLACEMENT.

4. - CONDITIONS AUX LIMITES.

5. - EQUATIONS DE BASE.

CHAPITRE -II-

ETUDE STATIQUE DU CONTACT LARGE AVEC FROTTEMENT ENTRE DEUX CYLINDRES

-

1. - INTRODUCTION.

Les assemblages de deux plaques se réalisent en général soit au moyen de rivets soit par des boulons. Si le problème de serrage dû au rivet et au boulon est aujourd'hui assez bien connu /CA/ par des calculs de techniques variées, le problème "transversal" concernant le contact entre la plaque et le boulon n'a été l'objet que de considérations expérimentales /FR/. Les méthodes modernes de conception assistées par ordinateur cherchent à tenir compte d'un maximum d'effets principaux et secondaires en vue de l'optimisation d'une structure. Il n'est donc pas inutile d'introduire dans ces calculs le problème du contact entre une plaque alésée à l'intérieur de laquelle est inséré un cylindre.

Un autre aspect technologique encore plus important est celui des paliers ; dans les réalisations courantes le

problème du contact ne se pose pas puisqu'il existe un film d'huile interposé. Toutefois dans des ambiances nocives (nucléaire) on ne peut interposer ce film et on utilise des paliers de type sec. De plus dans le cas de mouvements lents ou alternatifs : paliers d'essuies glaces en automobile, paliers de pales d'hélicoptères, on utilise grâce à l'apparition de matériaux nouveaux, en général matériaux composites, des paliers ne faisant plus intervenir de troisième corps à proprement parler. Cette conception nouvelle justifie encore la présente étude.

2. - NOTIONS SUR LES POTENTIELS COMPLEXES.

Nous supposerons les divers problèmes envisagés comme étant plans : soit en tant que "contraintes quasi planes", l'épaisseur du modèle est faible ; soit en tant que déplacement plan ; ou soit que ces deux schémas sont analogues aux caractéristiques mécaniques près. Cette hypothèse peut s'avérer restrictive danscertains cas (axes de pistons de pompes par exemple). La meilleure méthode analytique concernant les problèmes plans est celle de Muskhelishvile /MU/ dont nous donnons un résumé et qui se prêtera bien à nos calculs.

a - Théorie générale.

soit λ une fonction dérivable des seules variables x, y en posant :

$z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$ on obtient

$$\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} - i\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right) ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} + i\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)$$

Ici z et $\bar{z}$ sont considérées comme variables indépendantes et en posant indifféremment $\lambda(x, y) = \lambda(z, \bar{z}) = \lambda$

$$\partial\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial z}\partial z + \frac{\partial \lambda}{\partial z}\partial \bar{z} \quad ; \quad \Delta\lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)$$

On utilise en élasticité, plan la fonction d'Airy $\lambda(x, y)$, en posant

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial y} \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2}$$

Les équations de l'équilibre sont vérifiées et l'unique équation de compatibilité conduit à l'équation biharmonique $\Delta\Delta\lambda = 0$

Si l'on tient compte à présent du théorème classique "Toute fonction réelle harmonique est la partie réelle d'une fonction "analytique" on a

$\Delta\Delta\lambda = 0$ d'où

$$\Delta\lambda = 2\left|\phi(z) + \Phi(z)\right| = 4\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial z}\right)$$

et par intégrations successives par rapport à z et $\bar{z}$ on obtient puisque λ est une quantité réelle

$$2\frac{\partial \lambda}{\partial z} = \bar{z}\,\Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \Psi(z)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}\left[\bar{z}\,'\Phi(z- + z\,'\overline{\Phi(z)} + "\Psi(z) + "\overline{\Psi(z)}\right]$$

Dans les expressions précédentes $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ sont deux fonctions analytiques arbitraires et on a noté $'\Phi(z)$ une primitive de $\Phi(z)$ comme par exemple

$$'\Phi'(z) = \Phi(z)$$
$$''\Phi'(z) = '\Phi(z) \ \ldots$$

On en déduit les combinaisons de Kolosov

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] \quad \text{(premier invariant)}$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\left|\bar{z}\ \Phi'(z) + \Psi(z)\right|$$

et dans un système d'axes polaires (r, θ)

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2\left|\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right|$$

$$\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{rr} + 2i\,\tau_{r\theta} = 2\,e^{2i\theta}\left|\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right|$$

Comme dans la suite nousutiliserons les coordonnées polaires et en vertu des conditions aux limites n' auront besoin que des quantités σ_{rr} et $\tau_{r\theta}$ on posera pour simplifier $\sigma_{rr} = \sigma$ et $\tau_{r\theta} = \tau$ respectivement contrainte normale et tangentielle dans ce système d'axes. On a ainsi

$$\sigma + i\,\tau = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{-2i\theta}\left|z\,\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)}\right|$$

L'état des contraintes est donc déterminé à l'aide de deux fonctions arbitraires Φ et Ψ .

Il sera nécessaire dans la théorie d'exprimer aussi les déplacements en fonction de Φ et Ψ .

A cet effet on peut écrire :

$$4\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial\bar{z}^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} + i\,\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\lambda}{\partial y^2} + 2i\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}$$

$$= \sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\tau_{12}$$

La loi de comportement de l'élasticité classique conduit alors à :

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial\bar{z}^2} = -\,\mu\,\frac{\partial(U + iV)}{\partial\bar{z}}$$

Ou U et V sont les composantes du déplacement et μ le coefficient de Lamé, finalement

$$2\mu\ (U + iV) = -\,2\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} + f(z)$$

$$2\mu\ (U - iV) = -\,2\,\frac{\partial\lambda}{\partial z} + \overline{f(z)} \qquad ; f(z) \text{ arbitraire}$$

D'autre part, cette même loi de comportement implique :

$$2\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{K-1}{2}\,\Delta\lambda \quad \text{soit encore}$$

$$2\mu\left(\frac{\partial(U + iV)}{\partial z} + \frac{\partial(U - iV)}{\partial\bar{z}}\right) = 2\,(K-1)\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial\bar{z}}$$

Dans ces expression $K = \dfrac{3 - \nu}{1 + \nu}$, champ de contraintes quasi plan

$K = 3 - 4\,\nu$, champ de déformation plane.

Alors $$\frac{-4\,\partial^2\lambda}{\partial z\partial\bar{z}} + f'(z) + \overline{f'(z)} = 2\,(K-1)\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial z\partial\bar{z}}$$

et la fonction f (z) est alors telle que $f'(z) = (K + 1)\,\Phi(z)$

Finalement à un déplacement solidifiant près

$$2\mu\ (U + iV) = K\,'\Phi(z) - z\,\overline{\Phi(z)} - '\,\overline{\Psi(z)}$$

et en coordonnées polaires

$$u + iv = e^{i\theta}\ (U + iV)$$

u, v désignant les composantes du déplacement dans ce système.

B - Nous allons à présent montrer que l'état des contraintes et des déplacements peut se ramener à la détermination de la seule fonction $\Phi(z)$.

Supposons que les fonctions Φ (z) et Ψ (z) soient définies pour le disque ouvert $|z| < 1$ (par exemple l'arbre)

pour $|z| < 1$ $\qquad \sigma + i\tau = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - 2\ \overline{\Phi'(z)} - \dfrac{\overline{z}}{z}\,\Psi(z)$

on peut définir artificiellement une fonction Φ pour $|z| > 1$ en posant

$$\Phi(z) = -\ \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{z}\ \overline{\Phi'\left(\frac{1}{z}\right)} + \frac{1}{z^2}\ \overline{\Psi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Ce qui revient en fait, à poser l'expression initiale :
$\sigma + i\tau = 0$, à remplacer $\overline{z}$ par $\frac{1}{z}$ et à laisser "z" invariant.

Le second membre étant analytique la fonction $\Phi(z)$ est analytique dans tout le plan muni éventuellement d'une coupure appartenant au cercle de rayon unité.

On peut montrer facilement que l'on a

$$\Phi(\frac{1}{z}) = - \overline{\Phi(z)} + \overline{z}\ \overline{\Phi'(z)} + \overline{z}^2\ \overline{\Psi(z)} \qquad |z| < 1$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{z^2}\ \Phi(z) - \frac{1}{z}\ \Phi'(z) + \frac{1}{z^2}\ \Phi(\frac{1}{z})$$

$$\overline{\Phi\ (z)} - \overline{z}\ \overline{\Phi'(z)} = \overline{z}^2\ \overline{\Psi(z)} - \Phi(\frac{1}{z})$$

et finalement :

$$\sigma + i\tau = \Phi(z) - \overline{\Phi(\frac{1}{z})} + \overline{z}\ (\overline{z} - \frac{1}{z})\ \overline{\Psi(z)} \qquad (|z| < 1)$$

Si à présent z tend vers $t = e^{i\theta}$ et si on désigne par Φ^+ la limite de Φ lorsque z reste dans le disque $|z| \leqslant 1$ et respectivément par Φ^- la limite lorsque z reste dans le disque $|z| \geqslant 1$ on obtient la relation :

||A|| $$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \sigma + i\tau$$

De la même façon, on obtiendra

||B|| $$2\mu\ (\frac{du}{dt} + i\ \frac{dv}{dt}) = K\ \Phi^+ + \Phi^- \qquad (t = e^{i\theta})$$

Ainsi pour une frontière circulaire, les problèmes du type I, du typeII ou mixtes puevent être résolus à partir des relations (A) ou (B) (les résultats peuvent s'étendre aussi aux problèmes concernant les demi plans, utiles en génie civil).

Par exemple pour un problème du type II où les données sur la frontière concernent les forces surfaciques on peut montrer que la solution de (A) est la forme

$$\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sigma + i\tau}{t - z} + R(z)$$

Où γ est le cercle de rayon unité et R (z) une fraction rationnelle que l'on détermine par des conditions de régularité [MT].

Exemple :

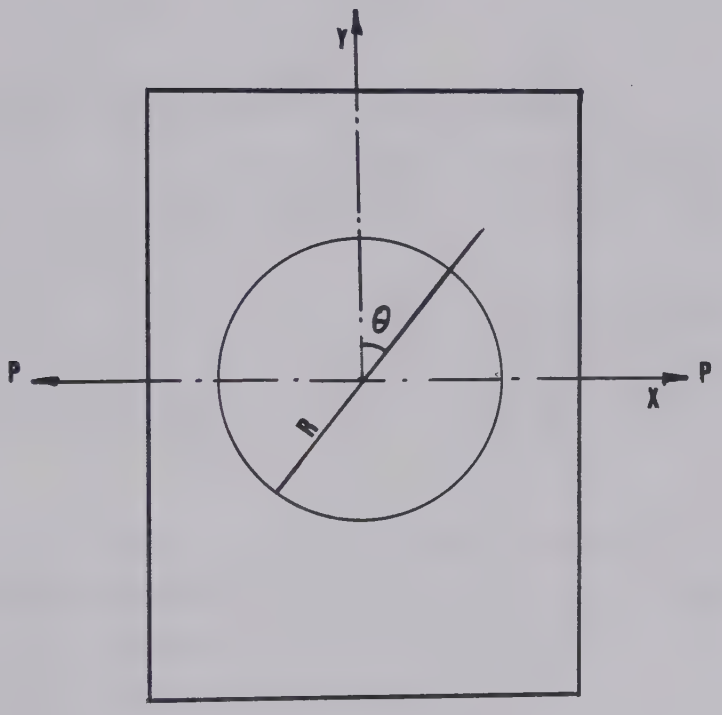


FIG 6

L'exemple le plus classique et en rapport avec l'objet de cette étude est la détermination des contraintes dans une plaque infinie affaiblie par un trou circulaire et soumise à un état de charge uniforme et mono-axial : $p\vec{x}$ (on peut aussi envisager un chargement uniforme biaxial).

Dans ce cas $\sigma + i\tau = 0$ sur le bord de l'alésage et il est facile de montrer la fraction rationnelle R (z) s'écrit :

$$R(z) = \frac{P}{4} - \frac{R^2}{2}\frac{P}{z^2}$$

on retrouve alors les résultats classiques :

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \frac{P}{2}\left(1 + 3\frac{R^4}{r^4} - 4\frac{R^2}{r^2}\right)\cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{P}{2}\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{P}{2}\left(1 + 3\frac{R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{P}{2}\left(1 - 3\frac{R^4}{r^4} + 2\frac{R^2}{r^2}\right)\sin 2\theta$$

Il faut souligner que par rapport aux autres P méthodes déterminant la solution d'un tel champ la méthode des potentiels complexes est très brève. De plus par transformation conforme on peut facilement obtenir la solution pour des formes d'alésage plus complexes par exemple une ellipse (Kolosov 1910).

.../...

3. - RELATION LIANT LES COMPOSANTS DU DÉPLACEMENT.

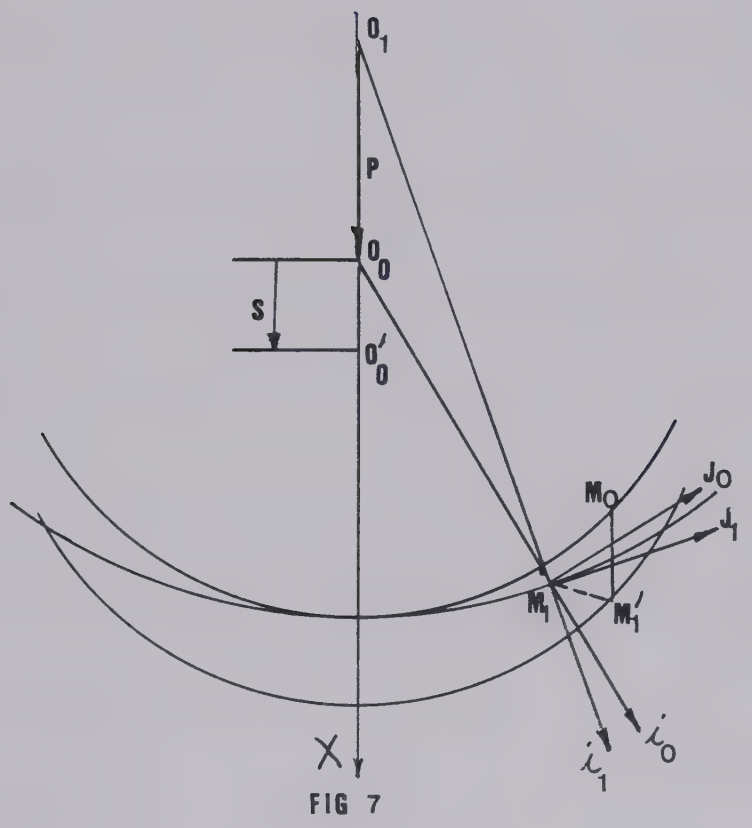


FIG 7

(Dans ce qui suit l'arbre est supposé rigide).

Comme nous l'avons déjà souligné la relation concernant les déplacements dans le cas de contacts étroits n'est plus recevable ici. En s'inspirant de la figure ci-dessus ou "P" désigne la charge, S la pénétration, les quantités affectées

de l'indice 1 sont relatives au cylindre extérieur et les quantités affectées de l'indice "O" sont relatives au cylindre intérieur. On peut écrire le désignant par M_1 et M_1' un point appartenant à l'alésage et respectivement son homologue à l'état déformé ainsi que par M_o le point de l'arbre qui vient se placer en M_1' :

$$\overrightarrow{O_oM_o} = \overrightarrow{O_oO_1} + \overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1M_1'} + \overrightarrow{M_1'M_o} \qquad \text{avec } \overrightarrow{M_1'M_o} = -\overrightarrow{Sx}$$

En projectant sur le repère $\vec{i}_o\vec{j}_o$ et en posant $\overrightarrow{M_1M_1'} = \begin{vmatrix} u \\ v \end{vmatrix}_{\vec{i}_1\ \vec{j}_1}$

On obtient les composants X, Y du vecteur $\overrightarrow{O_oM_o}$:

$$X = -(R_1-R_o+S)\cos\theta_o + R_1\cos(\theta_o-\theta_1) + u\cos(\theta_o-\theta_1)+v\sin(\theta_o-\theta_1)$$

$$Y = (R_1-R_o+S)\sin\theta_o - R_1\sin(\theta_o-\theta_1) - u\sin(\theta_o-\theta_1)+v\cos(\theta_o-\theta_1)$$

et l'on a nécessairement puisque l'arbre est rigide $X^2 + Y^2 = R_o^2$

En explicitant on obtient :

$$(R_1-R_o+S)^2 + R_1^2 + u^2+v^2 - 2R_1(R_1-R_o+S)\cos\theta_1 - 2u(R_1-R_o+S)$$

$$\cos\theta_1 + 2v(R_1-R_o+S)\sin\theta_1 + 2R_1u = R_o^2$$

En négligeant les termes du deuxième ordre S^2, uS, v^2 etc.. toujours petits dans l'hypothèse des petites perturbations on obtient après quelques arrangements :

$$R_1(R_1-R_o)(1-\cos\theta_1) + S(R_1-R_o-R_1\cos\theta_1) - u(R_1-R_o)\cos\theta_1$$

$$+ v(R_1-R_o)\sin\theta_1 + R_1u = 0$$

On peut remarquer, ce qui sera très pratique, que l'angle θ_o ne figure pas dans l'expression précédente et on posera $\theta_1 = \theta$.

Si l'on revient à présent aux composantes cartésiennes du déplacement U, V on peut facilement montrer à partir des relations

$$2u = e^{i\theta} (U-iV) + e^{-i\theta} (U + iV)$$

$$2iV = e^{-i\theta} (U-iV) + e^{i\theta} (U + iV)$$

que la relation précédente s'explicite :

$$e^{-i\theta} |U - S + iV| + e^{i\theta} |U - S - iV| + 2 \left(1 - \frac{R_o}{R_1}\right) (U - S)$$

$$= 2 (R_1 - R_o) (\cos \theta - 1)$$

Nota : si le jeu $R_1 - R_o$ est faible (de l'ordre de grandeur des déplacements on peut encore simplifier en posant :

$$R_1(R_1 - R_o) (1 - \text{Cos } \theta) - SR_1 \cos\theta + R_1 u = O$$

et on retrouve dans le cas d'un jeu identiquement nul l'expression classique $u = S\cos\theta$

Le calcul peut être généralisé moyennant certains hypothèses au cas ou les deux cylindres sont déformables.

Cette analyse est due essentiellement à Astre /AS/.

.../...

4. - CONDITIONS AUX LIMITES.

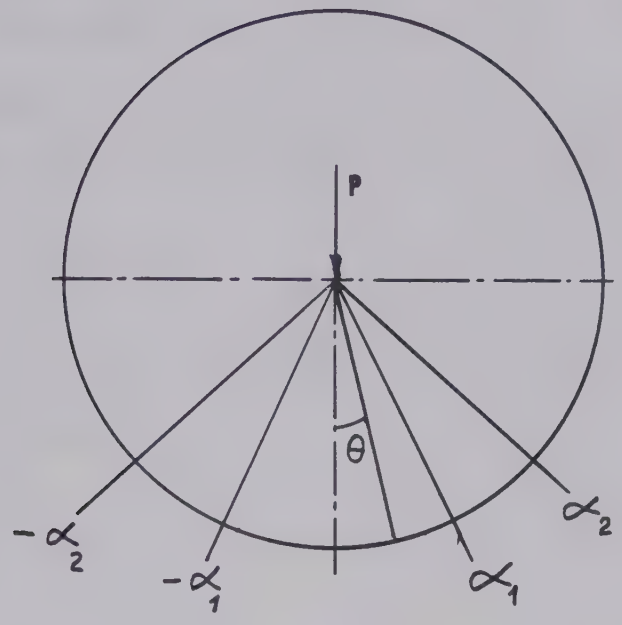


FIG 8

En désignant par θ un angle repérant un point quelconque de l'arc de contact on distinguera deux zones dans la partie relative au contact :

- Si $\theta \in (-\alpha_1, \alpha_1)$ il y a adhérence (zone d'adhérence)

Dans cette région les déplacements des deux corps sont égaux à un déplacement solidifiant près.

De plus en utilisant le schéma de Coulomb on doit vérifier l'inégalité

$$|\tau| < f\,|\sigma|$$

- Si $\theta E\ (-\alpha_1, -\alpha_2)\ U\ (\alpha_1, \alpha_2)$ il y a glissement (zone de glissement).

Dans cette situation on utilise la relation exposée dans le paragraphe précédent qui traduit le contact et l'on a en plus

$$|\tau| = f\ (\sigma)$$

Enfin dans la partie complémentaire où le contact n'existe pas on a

$$\sigma = \tau = 0$$

5. - EQUATIONS DE BASE.

Hypothèses

1 - le cylindre extérieur est assimilé à un milieu infini,

2 - Nous admettrons que le jeu $R_1 - R_o$ est faible et alors confondrons les variables θ_o et θ_1.

La première hypothèse est certes discutable en particulier en ce qui concerne les paliers mais mise à part une étude purement numérique aucune théorie sérieuse n'existe lorsque le milieu extérieur est fini.

La deuxième hypothèse n'est pas nécessaire mais elle simplifie certaines notations et si l'on ne la prend pas en compte on alourdit certains calculs sans pour autant obtenir des résultats plus rigoureux vis à vis des autres hypothèses. Lorsque le jeu est faible.

Si γ désigne l'arc de contact, les potentiels respectifs de la plaque (non chargée extérieurement), et de l'inclusion soumise à la charge "P" pour un rayon unité, valant /AS/

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sigma(t)+i\tau(t)}{t-z}\,dt + \frac{K_1 P}{2\pi(K_1+1)z}$$

et $$\Phi_o(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{\sigma(t)+i\tau(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{4i\mu}\int_\Upsilon \frac{\sigma(t)+i\tau(t)}{t}\,dt$$

$$- \frac{P}{2\pi\,(K_o+1)\,z} + \frac{Pz}{\pi\,(K_o+1)}$$

On posera dans la suite :

$$A = \frac{-1}{4i\pi}\int_\gamma \frac{\sigma(t)+i\tau(t)}{t-z}\,dt = -\frac{1}{4i\pi}\int_\gamma \frac{\sigma(t)}{t}\,dt$$

la fonction $\tau(t)$ étant impaire

a - Calcul relatif à la zone d'adhérence

On a alors

$$\frac{1}{\mu_o}\left|K_o\,\Phi^+ + \Phi^-\right| = \frac{1}{\mu_1}\left|K_1\Phi_1^- + \Phi^+\right|$$

Les formules de Plemlj permettent de déterminer les limites Φ^+ et Φ^- des deux potentiels : on a en effet :

$$\Phi^{\pm} = \pm \frac{1}{2} f(t_o) + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(t)}{t - t_o} dt$$

lorsque Φ est de la forme $\Phi(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(t)}{t - z} dt$

avec f(t) vérifiant certaines conditions très larges. Ainsi dans cette zone on a :

$$\left(\frac{K_o-1}{2\mu o} - \frac{K_1-1}{2\mu 1}\right)\left(\sigma(t_o) + i\,\tau(t_o)\right) + \frac{1}{2i\pi}\left(\frac{K_o+1}{\mu o} + \frac{K_1+1}{\mu 1}\right)\int_\gamma \frac{\sigma(t)+i\tau(t)}{t-t_o} dt$$

$$= -\left(\frac{K_o+1}{\mu o}\right) A - \frac{P}{\mu o \pi}\left(t_o - \frac{1}{2t_o}\right) + \frac{K_1 P}{2\pi \mu_1 t_o}$$

et si l'arbre est rigide (hypothèse recevable dans les applications : $\mu_o = \infty$, et l'hypothèse 2 initiale n'est plus alors à prendre en compte)

$$-\frac{(K_1-1)}{\mu 1}\left(\sigma(t_o) + i\,\tau(t_o)\right) + \frac{1}{i\pi}\frac{K_1+1}{\mu_1}\int_\gamma \frac{\sigma(t) + i\tau(t)}{t-t_o} dt$$

$$= \frac{K_1 P}{2\pi \mu_1 t_o}$$

On peut remarquer que le jeu n'apparaît pas dans cette équation toutefois comme cette dernière est couplée avec une équation relative à la zone de glissement où le jeu apparaît sa solution dépend donc du jeu.

Toujours en considérant l'arbre rigide en utilisant certaines combinaisons on obtient :

$$\frac{1}{i\pi}\left(\frac{K_1+1}{\mu 1}\right)\int_\gamma \frac{i\,\tau(t)\,dt}{t - t_o} dt = -\left(\frac{K_1-1}{\mu 1}\right)\sigma(t) - 2A\left(\frac{K_1+1}{\mu 1}\right) - \frac{K_1}{\mu_1}\frac{P}{2\pi}\left(t_o + \frac{1}{t_o}\right.$$

On aurait pu obtenir par une autre combinaison une équation où aurait figuré sous le signe somme $\sigma(t)$. Les deux choix sont équivalents.

Si on passe à la variable réelle en posant $t = e^{i\theta}$, $t_o = e^{i\theta_o}$

$\frac{dt}{t - t_o} = \frac{1}{2} \text{Cotg}(\frac{\theta - \theta_o}{2}) + i \frac{d\theta}{2}$ l'équation précédente devient alors

I $$\frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \tau(\theta) \text{Cotg}(\frac{\theta-\theta_o}{2}) = - \frac{k_1}{k_2} \sigma(\theta_o) - 4A - \frac{k_3}{k_2} P \text{Cos}\, \theta_o$$

avec $k_1 = \frac{1-K_1}{\mu 1}$; $2k_2 = \frac{K_1+1}{\mu 1}$; $k_3 = \frac{K_1}{\mu 1}$

Cette équation n'est valable que dans la zone d'adhérence. Bien que l'intégration porte sur toute la zone de contact. L'angle α_2 est bien sûr inconnu et l'on doit vérifier $|\tau| < f\,|\sigma|$ où $\theta \in (-\alpha_1, \alpha_1)$

b - Calcul relatif à la zone de glissement.

La relation liant les déplacements est générale c'est à dire valide à la fois dans la zone d'adhérence et dans la zone de glissement, il n'y a pas lieu donc, malgré l'intitulé du paragraphe, de distinguer les deux régions, et l'équation établie dans la suite sera valable en tout point de la partie en contact.

Un calcul complexe dû à Astre montre alors en supposant toujours l'arbre rigide et en posant $\varepsilon = 1 - \frac{R_o}{R_1}$ (jeu relatif) que l'on obtient :

$$(\frac{K_1-1}{\mu 1})\,(\sigma(t) - i t_o \frac{d\tau(t)}{dt_o}) + (\frac{1+K_1}{\mu 1}) \frac{1}{i\pi} \int_\gamma \frac{t_o \frac{d\sigma(t)}{dt} - i\tau(t)}{t - t_o}\, dt$$

$$= - (t_o + \frac{1}{t_o}) \frac{K_1 P}{\pi \mu 1} - 2A (\frac{1+K_1}{\mu 1}) - 2\varepsilon$$

(le cercle est de rayon unité) on assimile alors P à $\frac{P}{R}$ dans le cas général et après passage à la variable réelle on aboutit à l'équation définitive

$$\text{II} \quad \frac{k_1}{k_2}\left(\sigma(\theta_o) - \frac{d\tau}{d\theta_o}(\theta_o)\right) + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} \frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} + \tau(\theta)\,\mathrm{Cotg}\,\frac{(\theta_o-\theta)}{2}\,d\theta$$

$$= -4A - 2\frac{k_3}{k_2}\cos\theta_o - 4\varepsilon P$$

Le problème final est alors de résoudre les équations I et II.

C H A P I T R E III

RESOLUTION NUMERIQUE CONSEQUENCE SUR LES CRITERES DE VON MISES

-

1. - MODELISATION DU PROBLEME.

2. - APPROCHE DU PROBLEME.

3. - LA METHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE

4. - LES VALEURS INITIALES.

   a - Estimation de l'angle α_2
   b - Estimation de la constante a
   c - Estimation de l'angle α_1

5. - CRITERES DE RESISTANCE ET DONNEES. RESULTATS

6. - DONNEES - RESULTATS - COMMENTAIRE.

CHAPITRE -III-

RESOLUTION NUMERIQUE CONSEQUENCE SUR LES CRITRES DE VON MISES

-

1. - MODELISATION DU PROBLEME.

Bien que sur le plan pratique du contact non hertziens nous convenons d'associer le schéma constitué d'un arbre ou inclusion (indice O) de caractéristiques élastiques (E_o, ν_o) et d'une plaque infinie (indice 1) de caractéristiques (E_1, ν_1). Les deux corps sont assemblés avec jeu, l'ensemble du dispositif admettant comme plan π de symétrie XOY nous pourrons procéder à l'étude d'état de contraintes ou de déformations planes précisément dans ce plan de symétrie (fig.**9**).

.../...

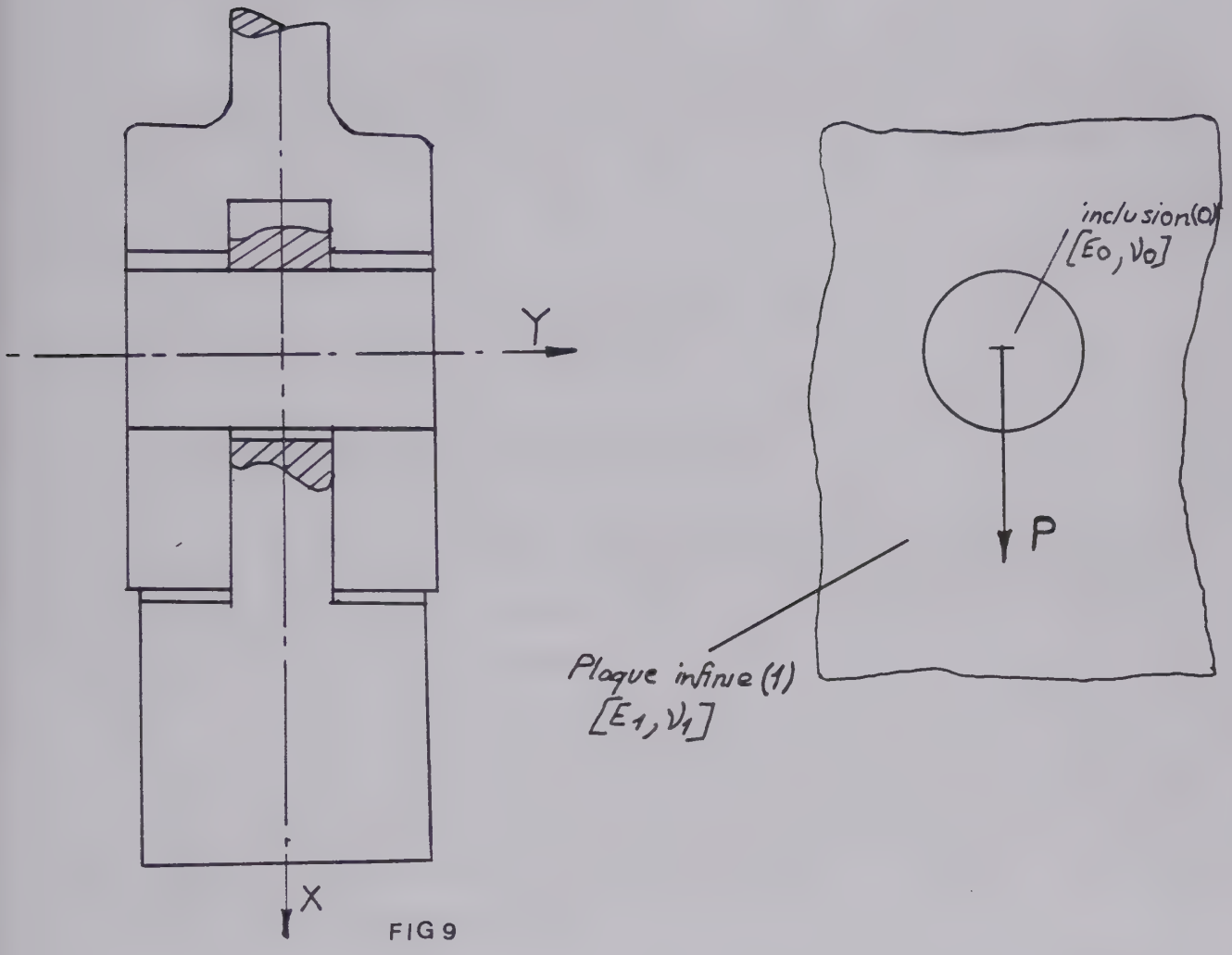


FIG 9

Nous avons assimilé le solide extérieur à une plaque infinie percée d'un trou circulaire, nous exerçons en outre sur l'inclusion un effort P appliqué en son centre.

2. - APPROCHE DU PROBLEME.

On a donc à résoudre le système d'équations intégro-différentielles couplées I et II définies à la fin du précédent chapitre. A ces équations s'ajoute l'équation d'équilibre statique

$$\text{III} \qquad \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} (\sigma \cos\theta - \tau \sin\theta)\, d\theta = -P$$

et leslois de frottement de Coulomb.

Les inconnues sont les contraintes σ et τ , les angles α_1 et α_2 et éventuellement la pénétration S. Cette dernière inconnue n'intervenant pas dans les équations nous ne la prendrons pas en compte.

Si l'on utilise une méthode classique de discrétisation des équations précédentes, le système linéaire conséquent donne des résultats peu précis voire erronés. Ceci est dû essentiellement aufait qu'il est difficile "d'évaluer" les intégrales à noyau singulier.

Beaucoup d'auteurs, et ce dans le cas sans frottement de loin plus simple, posent a priori un certain choix de distribution de pression $\sigma(\theta)$ sous forme de série, par exemple $\sigma(\theta) = (\cos^2\theta - \cos^2\alpha) \sum_{n=o}^{p} C_n \cos(2n+1)\theta$ [GL] les coefficients C_n sont déterminés par le calcul et l'on peut montrer que les coefficients C_o et C_1 suffisent en général.

Nous suivrons en partie cette voie. Dans le cas du frottement les mesures expérimentales et les résultats numé-

riques - théoriques fournies dans beaucoup de problèmes de contact montrent 1) que dans la zone d'adhérence l'évolution de la contrainte tangentielle est linéaire et que 2) la contrainte normale est peu affectée par la présence du frottement. En utilisant les remarques précédentes nous poserons "a priori".

$$\sigma(\theta) = a(\theta^2 - \alpha_2^2) \qquad \theta E (-\alpha_2, \alpha_2)$$

$$\tau(\theta) = b\theta \qquad \theta E (-\alpha_1, \alpha_1)$$

a, b, α_2 sont des quantités supposées inconnues.

Il va donc sans dire que ce choix peut paraître restrictif, mais il présente un caractère simple et les fonctions représentatives semblent voisines des phénomènes expérimentaux. On peut sans inconvénient majeur utiliser des représentations plus complexes dans le traitement numérique proposé dans la suite.

Dans ces conditions, on est donc conduit à déterminer les 4 inconnues a, b, α_1, α_2 (rappelons que l'inconnue S n'intervient pas directement). Le signe du glissement relatif entre les deux solides est déterminant dans cette étude car il entraîne la valeur + 1 ou - 1 de ε . Nous avons choisi ce signe comme celui obtenu dans le cas sans frottement ceci par continuité entre les problèmes sans frottement et les problèmes avec frottement. Ce signe est dans tous les cas envisagé par la suite positif pour le corps 1 $\overline{0/AS/}$; la contrainte tangentielle est donc positive .

.../...

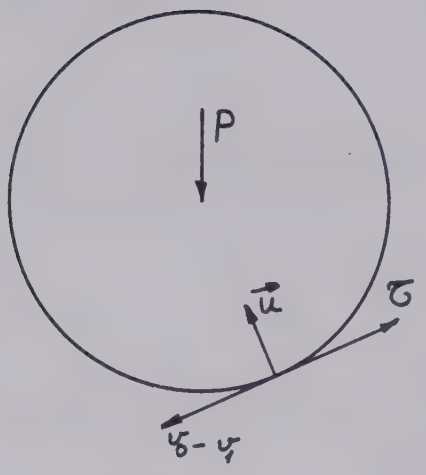


FIG 10

D'autre part, la contrainte tangentielle est continue (ce fait peut être contesté). On peut observer expérimentalement et justifier théoriquement $\overline{SV}$ une discontinuité de la contrainte tangentielle . On a donc

$$\tau(\alpha_1) = b\alpha_1 = - f\,\sigma(\alpha) = - f\,a\,(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$$

d'où

$$b = - a\,f\,\left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2}{\alpha_1}\right)$$

il n'apparaît plus ainsi que trois inconnues a, α_1, α_2

Dans ces conditions les équations respectives s'explicitent en décomposant suivant les différents zones :

../...

Zone d'adhérence :

$$I' \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_2}^{-\alpha_1} fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)\,\mathrm{Cotg}\,\frac{(\theta-\theta o)}{2}d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} b\theta\,\mathrm{Cotg}(\frac{\theta-\theta o}{2})d\theta \\ \qquad + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)\,\mathrm{Cotg}\,(\frac{\theta-\theta o}{2})d\theta + \frac{k_1}{k_2}\,a\,(\theta^2-\alpha_2^2) - \frac{4}{3}\,\frac{a}{\pi}\,\alpha_2^3 \\ \qquad + \frac{k_3}{k_2}\,P\,\mathrm{Cos}\,\theta_o = 0 \end{array} \right.$$

On suppose ici a > 0

$$II' \left[\begin{array}{l} \frac{k_1}{k_2}\left[\,a\,(\theta^2-\alpha_2^2) - b\,\right] + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_2}^{-\alpha_1}\left[\,2a\theta + fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)\right]\mathrm{Cotg}(\frac{\theta_o-\theta}{2})\,d\theta \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}|2a\theta + b\theta|\,\mathrm{Cotg}\,(\frac{\theta_o-\theta}{2})d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}|2a\theta - fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)| \\ \mathrm{Cotg}\,(\frac{\theta_o-\theta}{2})\,d\theta - \frac{4a\alpha_2^3}{3\pi} + 2\,\frac{k_3}{k_2}\,P\,\mathrm{Cos}\,\theta_o + 4\,\varepsilon\,P = 0 \end{array} \right.$$

(On suppose b > 0)

.../...

Zone de glissement

$$\frac{k_1}{k_2}\left|a\,(\theta^2-\alpha_2^2)+2fa\theta_o\right| + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_2}^{-\alpha_1}\left|2a\theta + fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)\right|$$

II"

$$\cdot \operatorname{Cotg}\left(\frac{\theta o-\theta}{2}\right)d\theta$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_1}^{\alpha_1}\left|2a\theta + b\theta\right| \operatorname{Cotg}\left(\frac{\theta o-\theta}{2}\right)d\theta + \frac{1}{\pi}\int_{\alpha_2}^{\alpha_2}\left|2a\theta - fa\,(\theta^2-\alpha_2^2)\right|$$

$$\cdot \operatorname{Cotg}\left(\frac{\theta o-\theta}{2}\right)d\theta$$

$$-\frac{4a\alpha_2^2}{3\pi} + \frac{2k_3}{k_2}P\cos\theta_o = 0$$

Enfin on dispose de l'équation d'équilibre $= \int_{-\alpha 2}^{\alpha 2}(\sigma\cos -\tau\sin\theta)d\theta = -P$

qui s'explicite

$$\int_{o}^{\alpha 1}\left|a(\theta^2-\alpha_2^2)\cos\theta - b\theta\sin\theta\right|d\theta + \int_{\alpha 1}^{\alpha 2}\left|a(\theta^2-\alpha_2^2)\cos\theta + fa(\theta^2-\alpha_2^2)\right.$$

$$\left.\sin\theta\right| d\theta = -0.5P$$

Cette relation entraîne

$$2a\,|2\alpha_2\cos\alpha_2 + 2f\alpha_2\sin\alpha_2 - 2f\alpha_1\sin\alpha_1 - 2\sin\alpha_2 + 2f\cos\alpha_2 -$$

$$2f\cos\alpha_1 + f\alpha_1^2\cos\alpha_1 - f\alpha_2^2\cos\alpha_1| - 2b\,(\sin\alpha_1 - \alpha_1\cos\alpha_1)$$

$$+ 1 = 0$$

Finalement on aboutit à un système non linéaire de quatre équations a trois inconnus a (ou b), α_1, α_2, le problème est alors d'optimiser ces inconnues par exemple en minimisant la somme des carrés des premiers membres de chaque équation c'est à dire d'utiliser une technique numérique d'optimisation.

L'évaluation numérique des intégrales (au sens de Couchy) où figurent le noyau singulier Cotg $(\frac{\theta-\theta o}{2})$ ne pose pas de difficultés.

3. - LA MÉTHODE DE QUADRATISATION PARTIELLE [LE]

Il existe un grand nombre de techniques d'optimisation, nous avons choisi ici la méthode dite de quadratisation partielle quicomme toutes les méthodes d'optimisation est une amélioration de la technique classique du "gradient". La méthode de quadratisation partielle n'est pas une panacée ; elle ne s'avère efficace et précise que si les données initiales sont proches de la solution exacte (nous montrerons dans la suite qu'il en est ainsi pour le problème) et si le nombre des inconnues est faible (ici 3). Nous exposons ici un résumé de la méthode suivie.

Notons X le point représentant les inconnues α_1, α_2, a

$\dot{X} = (\alpha_1, \alpha_2, a)$ et f (X) la fonction à optimiser ; au voisinage de X_r on a

$$f(X) = f(X_r) + B^{\%}(X - X_r) + \frac{1}{2}(X-X_r)^{\%} A (X-X_r) + \ldots$$

Ou l'on a noté B le vecteur gradient et A le Hessein c'est

à dire la matrice symétrique dont les éléments sont les dérivés partielles du second ordre. (la notion $B^{\circ}_{\circ}$, $A^{\circ}_{\circ}$ signifie la matrice transposée). Si l'on considère comme polynôme approchant P les seuls trois premiers termes de f (X) le maximum de P(X) aura pour coordonnées la solution de = A $(X-X_r)$ + B = O

Système linéaire de trois équations qui délivre une nouvelle valeur X_{r+1} de X, on pratique alors le même calcul mais à partir de la valeur X_{r+1} , "A" et "B" dépendant naturellement de X et ainsi de suite. Toutefois, cette méthode présente deux défauts majeurs :

Rien ne prouve que le processus converge et que le test de minimum f $(X_2 + 1) < f (X_2)$ soit assuré. On montre toutefois que si f (X) est un polynôme de second degré et si la matrice "A" est positive les conditions sont remplies. Le deuxième défaut est, qu'en général, il n'est pas possible, vu la formulation compliquée du problème, et c'est notre cas, de calculer ni le gradient "B" ni le Hessein "A". Il est donc nécessaire de pratiquer quelques approximations. En premier lieu on utilise pour représenter la fonction f (X) un polynôme d'interpolation de second degré

$$P(X) = a + \sum_{i=1}^{3} \left(bi\, X_i + \frac{1}{2} C_i X_i^2\right) + \sum_{\substack{1\leq i\leq 3 \\ 1\leq j\leq 2}} dij\, X_i X_j$$

les variables X_i représentant les quantités a, α_1, α_2

Les scalaires a, b_i, C_i, dij ayant pour valeurs respectives :

$$a = f(X_r) \quad , \quad b_i = \frac{1}{2h} \left| f(X_r + h\,\delta) - f(X_r - h\,\delta_i) \right|$$

$$C_i = \frac{1}{h^2} \left| f(X_r + h\delta_i) - 2f(X_r) + f(X_r - h\,\delta_i) \right|$$

$$dij = \frac{1}{h^2} \left| f(X_r + h\delta_{ij}) - f(X_r + h\delta_1) - f(X_r + h\delta_j) + f(X_r) \right|$$

Le symbole δ_i signifiant que l'on considère la variable de rang i et δ_{ij} le contraire du symbole de Kroieckes :
$\delta_{ij} = 1$ si $i \neq j$
$\delta_{ij} = 0$ si $i = j$

h est le pas. Plus commodément on peut écrire en désignant par B le vecteur de composantes b_i, par A la matrice dont les éléments situés sur la diagonale sont les coefficients C_i les autres étant les d_{ij}

$$P(X) = f(X_r) + B^{\circ}(X - X_r) + (X-X_r)^{\circ}A(X-X_r)$$

Notons que dans notre cas il est facile numériquement de déterminer B et A en un point donné.

Si le pas h tend vers zéro on retrouve la définition du gradient et du Hessien.

Il peut se trouver qu'en un point donné la matrice A ne soit pas définie positive et par suite le processus de minimisation ne soit pas vérifié. L'essentiel de la méthode de quadratisation partielle consiste partiellement à éviter cet écueil. Le principe est le suivant, on considère deux types de variables ; les variables bloquées telle que

$X_{(1)r+1} - X_{(1)r} = 0$ d'où le nom de quadratisation partielle
les autres variables

$X_{(2)r+1} - X_{(2)r} \neq 0$ pouvant évoluer (variables évolutives)

le choix de ces deux types de variable s'effectue de la façon suivante. On utilise la décomposition de CHOLESKY /RA/ d'une matrice symétrique ; on peut écrire dans certains cas :

$$A = S.S^{\circ}$$

Ou la matrice S est triangulaire inférieure et le produit $S.S^{\circ}$ défini positif. On a donc

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}$$

On constate que cette décomposition n'est pas systématique ; en effet on a par exemple $s_{11}^{2} = a_{11}$ si a_{11} est négatif il n'y a pas de solution. D'une façon générale on obtient : $(j \geqslant i)$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i=1} S_{Ki}^{2}} \qquad \text{(sans sommation sur i)}$$

$$S_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i=1} s_{Ki} \cdot S_{kj}}{s_{ii}} \qquad j = 1 + i \cdots n$$

Lorsque cette décomposition n'est pas possible on supprime dans la matrice A la ligne et la colonne de tout élément conduisant à un S_{ii}^{2} négatif.

Les lignes et les colonnes supprimées correspondent aux variables bloquées. Pour les autres variables on est sûr puisque la matrice $S\ S^{\circ}$ est positive que $f^{(X)}_{(2)r+1} < f^{(X)}_{(2)r}$

A chaque étape les variables bloquées et les variables évolutives peuvent être modifiées ; cela dépend de la matrice du nouveau hessien.

Le programme divulgué /LE/ relatif à cette méthode est assez long car le choix du pas h intervient sur le comportement du traitement. D'autre part, il est possible que dès le début il n'y ait pas de variables évolutives, nous n'avons pas rencontré cette situation.

En résumé, nous avons approximé la somme des carrés des 4 équations par un polynôme du second degré en a, α_1, α_2, puis pour rendre la plus proche possible de zéro cette quantité positive, on utilise la méthode des variables mixtes (bloquées ou évolutives).

3. - LES VALEURS INITIALES.

Comme nous l'avons souligné une condition pour que la méthode proposée soit satisfaisante est que les données initiales ne soient pas trop éloignées de la solution exacte. Nous allons procéder ici à une estimation de ces données qui consiste en quelque sorte à négliger le frottement.

a - Estimation de l'angle α_2

Si l'on ne prend pas en compte le frottement, ASTRE /AS/ propose une formule approchée voire exacte dans certains cas, que doit satisfaire l'angle α_2 : cette relation est conséquente de l'équation d'équilibre. On obtient :

../...

$$\frac{\frac{k_3 \cdot k_4}{k_2^2} P \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + \frac{2\varepsilon\pi}{k_2}}{1 + \frac{k_3}{k_2} \log \cos \frac{\alpha_2}{2}} \sin^2 \frac{\alpha_2}{2} + P \frac{k_4}{k_2} \left(2 \sin \frac{\alpha_2}{2} - \sin^4 \frac{\alpha_2}{2}\right) = P$$

Cette équation algébrique délivre une valeur α_2 de l'angle des contacts pour une charge P et un jeu ε donné. Elle est facile à résoudre numériquement à l'aide de "Calculetteur" utilisées dans le commerce.

b - Estimation de la constante a.

Une formulation identique conduit à la relation approchée en ce qui concerne la contrainte normale

$$\sigma(\theta) = -\left(2A \frac{k_3}{k_2} + 2 \frac{\varepsilon}{k_2}\right) \text{Arg ch} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\alpha_2}{2}} - \frac{2P}{\pi} \frac{k_4}{k_2} \cos \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\alpha_2}{2}}}$$

En posant $A = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\alpha_2} \sigma(\theta)\, d\theta$ on obtient :

$$A = \frac{\frac{P}{2} \frac{k_4}{k_2} \sin \frac{\alpha_2}{2} - \frac{\varepsilon}{k_2} \log \cos \frac{\alpha_2}{2}}{1 + \frac{k_3}{k_2} \log \cos \frac{\alpha_2}{2}}$$

(Cette quantité est > 0 pour les matériaux classiques)

Connaissant ainsi α_2 on détermine A et par la suite la donnée initiale a de la fonction $\sigma(\theta) = a(\theta^2 - \alpha_2^2)$

c - Estimation de l'angle α_1

Les deux données initiales précédentes sont faciles à évaluer et en fait évoluent peu "a postériori" dans le programme pour des coefficients de frottement admissibles. La donnée initiale α_1 de l'angle d'adhérence est plus difficile à estimer (car petite). Astre propose, dans le cas sans jeu ($\varepsilon = 0$), que dans la zone d'adhérence $\sigma'(\theta) = 0$ et que par suite la contrainte tangentielle $\tau(\theta)$ vaut (pour des matériaux identiques)

$$\tau(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\alpha_2}{2}}}\left[2A\sin\frac{\theta}{2} + \frac{P}{\pi}\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{P}{\pi}\cos\alpha_2\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

l'angle α_1, étant donné par l'équation $\tau(\theta) = -f\ \sigma(\theta)$

En suivant le même raisonnement on peut proposer en présence de jeu et pour des matériaux différents l'estimation suivante :

$$\tau(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\alpha_2}{2}}}\left[4A\sin\frac{\theta}{2} + \frac{P}{\pi}\frac{k_3}{k_2}\sin\frac{3\theta}{2} - \frac{P}{\pi}\cos\alpha_2\sin\frac{\theta}{2} + \frac{3\varepsilon}{k_2}\sin\frac{\theta}{2}\right]$$

et de la même façon chercher l'angle α_1 initial tel que

$$\tau(\theta) = -f\ \sigma(\theta).$$

Il se trouve que la solution existe pour des jeux et des coefficients de frottement physiques.

4. - CRITERES DE RESISTANCE ET DONNEES. RESULTATS.

Un point important est de voir comment les critères de résistance sont modifiés en présence du frottement. En l'absence de ce dernier les critères classiques atteignent leur seuil au droit de la charge ; c'est donc au voisinage de ce point que l'usure est en principe la plus importante fait qui n'est pas constaté éxpérimentalement. D'un autre point de vue il n'est pas fondé comme le soulignaient certains auteurs [GO] d'appliquer les critères classiques concernant le volume pour qualifier les phénomènes de dégénérescence physique des états de surface. Il est toutefois aujourd'hui prouvé que les altérations sont dues essentiellement à la contrainte tangentielle, Or cette dernière n'est pas maximum à la surface mais sur une autre surface à l'intérieur du volume si l'on retient le schéma de Hertz (on expliquerait ainsi en partie le phénomène dit de pitting). Il est ainsi évident que la présence du frottement qui modifie radicalement la contrainte tangentielle doit être envisagée.

Le critère retenu dans notre étude et le plus fréquemment utilisé est celui de Von Mises, qui dans le cas plan s'explicite

$$\sigma_{\theta\theta}^2 + \sigma_{rr}^2 - \sigma_{\theta\theta}\sigma_{rr} + 3\tau_{r\theta}^2 = K^2$$

Ou K est une constante demandée à l'expérience. Ce critère signifie que l'énergie dite de distorsion où l'énergie relative au déviateur des contraintes ne doit pas dépasser un certain seuil. Il n'y a pas lieu de discuter ici du mérite relatif des nombreux critères existants, tous plus ou moins bien vérifiés. Soulignons simplement qu'ils font intervenir seulement l'état des contraintes; récemment Bascoul et Maso [BA] proposent un critère voisin de celui de Von Mises mais qui tient compte

des gradients spatiaux de l'état des contraintes pour traduire les comportements limites des roches. Si ce point de vue semble bien confirmé expérimentalement par les auteurs nous n'avons pas pu le suivre car il nous était difficile d'évaluer numériquement avec précision les gradients spatiaux.

En conclusion, nous avons donc retenu le critère de Von Mises.

Les données concernant σ_{rr} et $\tau_{r\theta}$ il nous faut donc calculer $\sigma_{\theta\theta}$. Pour ce faire nous utilisons la méthode des potentiels complexes. On sait que

$$\sigma_{rr} - i\,\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}\,\left| z\,\Phi'(z) + \Psi(z) \right|$$

Où Φ (z) et Ψ (z) sont les fonctions potentielles. On peut poser

$$\Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n} \quad , \quad \Psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \grave{a}_n z^{-n},$$

Sur la frontière la fonction $\sigma_{rr}(\theta) - i\,\tau_{r\theta}(\theta)$ peut être développée en série de Fourier

$$\sigma_{rr}(\theta) - i\,\tau_{r\theta} = A_0 \left(\sum_{1}^{\infty} A_n \cos n\theta - i\,B_n \sin n\theta \right)$$

(la fonction σ_{rr} est paire par contre $\tau_{r\theta}$ est impaire). On obtient ainsi

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} a\,(\theta^2 - \alpha_2^2)\,d\theta = -\frac{2}{3}\,a\,\alpha_2^3$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} a\,(\theta^2 - \alpha_2^2)\,\cos n\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4a}{\pi} \left| \frac{\alpha_2 \cos n\alpha_2}{n^2} - \frac{\alpha_2 \sin n\alpha_2}{n^3} \right|$$

De même

$$B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\alpha_1} b\theta \sin n\theta\, d\theta + \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} - fa\,(\theta^2 - \alpha_2^2) \sin n\theta\, d\theta =$$

$$- \frac{4a}{\pi} \left| \frac{\alpha_2 \sin n\alpha_2}{n^2} + \frac{\cos n\alpha_2}{n^3} - \frac{\alpha_1 \sin n\alpha_1}{n^2} - \frac{\cos n\alpha_1}{n^3} \right| + \frac{2b}{\pi}$$

$$\left| \frac{\sin n\alpha_1}{n^2} - \frac{\alpha_1 \cos n\alpha_1}{n} \right|$$

Posant $z = e^{i\theta}$ un procédé d'identification classique permet de déterminer les coefficients a_n, $\grave{a}_n$ en fonction des coefficients A_n et B_n connus (les coefficients a_o et $\grave{a}_o$ sont nuls).

Enfin la fonction dite de Kolosov

$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = 2 \left| \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} \right|$ permet de déterminer $\sigma_{\theta\theta}$ connaissant σ_{rr} et $\Phi(z)$. Dans les séries nous avons retenu dix termes d'un point de vue numérique.

.../...

5. - DONNEES - RESULTATS - COMMENTAIRE.

Nous avons choisi le bronze (μ = 4300 daN/m2, ν = 0.31) comme matériau constituant la plaque, ce type de matériau était voisin par ses caractéristiques élastiques des coussinets de palier, rappelons que l'axe est rigide. La charge est de 2800 daN et les jeux relatifs

$\varepsilon = \frac{R_1 - R_o}{R_o}$ successifs ont été envisagés : ε = 0.0003, 0.0005, 0.001, 0.002, 0.003. Cette gamme de jeux couvre celle que l'on rencontre dans les applications. Le coefficient de frottement est égal à 0.3 choisi beaucoup plus élevé (que ceux rencontrés dans la pratique pour mettre en évidence certains phénomènes. Nous avons représenté dans chaque cas σ_r , τ_θ , σ_θ et la courbe correspondant au critère de Von Mises notée σ_{Cri}. Ces courbes ont été tracées directement sur table traçante à partir des résultats de l'ordinateur. Les résultats sont donnés sans dimensions autrement dit pour obtenir une quantité homogène à une contrainte, il faut les multiplier par P/R.L. ou P est la charge R le rayon de l'alisage L l'épaisseur de la plaque (figure 1, 2, 3, 4, 5) ici R = 3,5 cm et L = 1 cm.

A titre de comparaison nous avons regroupé les résultats correspondants à différents jeux sur les graphiques (6, 7, 8).

Afin de tester la méthode numérique précédemment décrite nous avons vérifié l'équation d'équilibre :

$$\int_0^{\alpha_2} (\sigma \cos\theta - \tau \sin\theta)\, d\theta = -0.5$$

Cette dernières est toujours vérifiée avec une erreur inférieure à 10 % due bien sûr au schéma d'approximation des contraintes $\sigma = a(\theta^2 - \alpha_2^2)$, $\tau = b\theta$ dans la zone d'adhérence, à la méthode d'optimisation suivie et enfin à l'évaluation des intégrales approximées par la méthode de Simpson et ce pour certaines en valeur principales de Couchy. Ce test nous semble donc très convenable. L'évolution des résultats en fonction du jeu semble logique. En particulier le tableau ci-dessous donne pour chaque cas de jeu les angles α_1, α_2, σ_{max}, τ_{max}, σ_{cri}

jeu	0.0003	0.0005	0.001	0.002	0.003
α_1	19.8228	20.0801	15.0596	11.9276	10.0
α_2	85.7681	79.7418	60.1292	46.9826	39.5831
σ_{max}	-0.6095	-0.6102	-0.7148	-0.7992	-1.0772
τ_{max}	0.1731	0.1714	0.2010	0.2243	0.3025
σ_{cri}	0.61	0.6035	0.6306	0.6804	1.1731

Commentaire.

1) La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ augmente en valeur absolue au droit de la charge lorsque le jeu augmente, ceci semble plausible physiquement (courbe 7). Dans tous les cas cette contrainte s'annule pour θ voisin de 14°. On ne peut tirer d'autres conclusions précises sur les diverses évolutions de cette contrainte.

2) Un point essentiel est à souligner : dans le cas où le frottement est négligé le critère de Von Mises atteint son seuil au droit de la charge. Si l'on prend en compte le frottement ce critère présente un pic prononcé au voisinage de l'angle α_1 qui distingue la zone d'adhérence et la zone de glissement. Certaines expériences confirment en effet, des états d'usure plus prononcés dans ce voisinage (il faut toutefois être prudent sur cette interprétation).

Enfin si l'on considère toujours le même critère on constate que si l'on augmente le jeu dans sun rapport de 10 le seuil est augmenté de 50 % environ. Cette constation est naturelle mais invite à ne pas choisir des jeux excessifs.

Nous donnons ici les tableaux des résultats obtenus par ordinateur avec les données ε = 0.0005, 0.001, 0.003

où T = l'angle sur l'arc de contact en (rad.)

XN = la contrainte normale σ_r (sans dimensions)

TN = la contrainte tangentielle τ_θ ""

XT = σ_θ = la contrainte circulaire ""

SIGMAC = $K^2 = \sigma_\theta^2 + \sigma_{rr}^2 - \sigma_r \sigma_\theta + 3 \tau_{r\theta}^2$ ""

$$SG = \int_{-\alpha_2}^{\alpha_2} (\sigma \cos\theta - \tau \sin\theta)\, d\theta - 1$$

```
EPS=  .99999997E-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=     19.8228    ETA2=     85.7681    A=        .2720
```

I	T	XN	TN	SG	XT	SIGMAC
1	.0000	-.6095	.0000	.0191	-.4561	.3015
2	.0346	-.6092	.0173	.0191	-.4496	.3003
3	.0692	-.6082	.0346	.0191	-.4305	.2970
4	.1038	-.6066	.0519	.0191	-.4000	.2934
5	.1384	-.6043	.0692	.0191	-.3601	.2916
6	.1730	-.6014	.0865	.0191	-.3134	.2939
7	.2076	-.5978	.1039	.0191	-.2626	.3017
8	.2422	-.5936	.1212	.0191	-.2109	.3156
9	.2768	-.5887	.1385	.0191	-.1609	.3352
10	.3114	-.5831	.1558	.0191	-.1151	.3590
11	.3460	-.5769	.1731	.0191	-.0753	.3850
12	.4611	-.5517	.1655	.0191	.0028	.3881
13	.5762	-.5192	.1558	.0191	.0146	.3502
14	.6913	-.4795	.1439	.0191	.0170	.3005
15	.8064	-.4326	.1298	.0191	.0552	.2646
16	.9215	-.3786	.1136	.0191	.1293	.2476
17	1.0366	-.3173	.0952	.0191	.2129	.2407
18	1.1516	-.2488	.0746	.0191	.2877	.2329
19	1.2667	-.1730	.0519	.0191	.3515	.2224
20	1.3818	-.0901	.0270	.0191	.3975	.2042
21	1.4969	-.0000	.0000	.0191	.3999	.1599

```
*STOP* 0
**********************************************************************
STPTIME VIRT REL ACT TRA CRM   FAULTS     INS   OUTS     RATE-P/S UC-E RL-E
  0.018   50  40  35  03  20       19      00     00        17.27 2.29 2.35

T967    STEP  WAIT  CORE     END    DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
          03  00.01    21  15*51*14   14    00.01 15*51*11 TERM
**********************************************************************
**********************************************************************
     TIME       TIME*CORE       CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
     00.62          25.37            94%         61.89           11%
```

```
EPS=  .99999997E-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=     20.0801    ETA2=     79.7418    A=       .3159
```

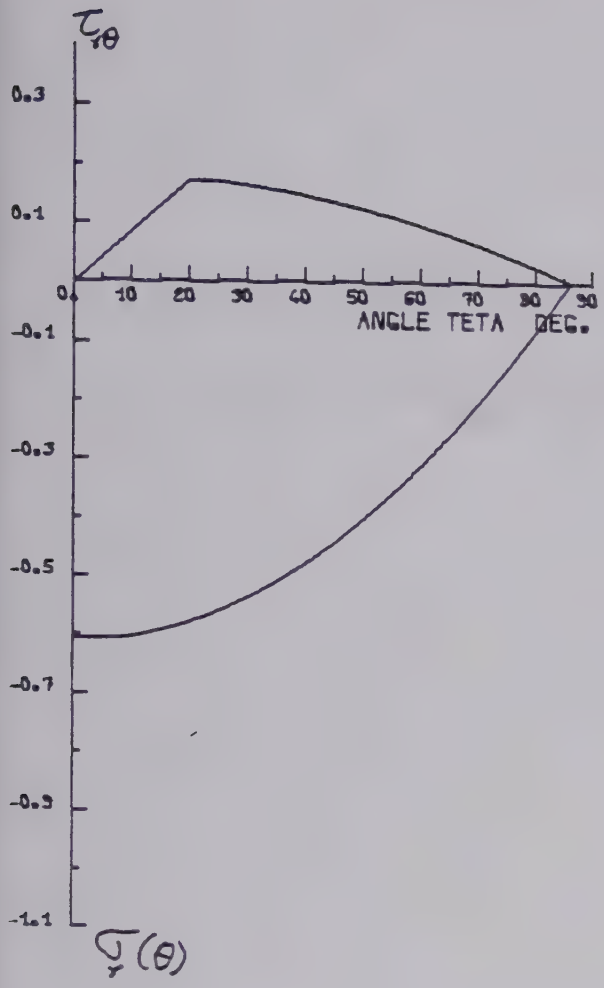
I	T	XN	TN	SG	XT	SIGMAC
1	.0000	-.6119	.0000	.0067	-.4670	.3068
2	.0350	-.6115	.0172	.0067	-.4607	.3054
3	.0701	-.6103	.0344	.0067	-.4423	.3017
4	.1051	-.6084	.0516	.0067	-.4127	.2974
5	.1402	-.6057	.0688	.0067	-.3739	.2944
6	.1752	-.6022	.0860	.0067	-.3281	.2949
7	.2103	-.5979	.1032	.0067	-.2778	.3005
8	.2453	-.5929	.1204	.0067	-.2259	.3121
9	.2804	-.5871	.1375	.0067	-.1750	.3293
10	.3154	-.5805	.1547	.0067	-.1274	.3511
11	.3505	-.5731	.1719	.0067	-.0850	.3756
12	.4546	-.5466	.1640	.0067	-.0001	.3794
13	.5587	-.5133	.1540	.0067	.0271	.3492
14	.6629	-.4731	.1419	.0067	.0302	.2995
15	.7670	-.4261	.1278	.0067	.0506	.2547
16	.8711	-.3722	.1117	.0067	.1090	.2284
17	.9752	-.3114	.0934	.0067	.1975	.2237
18	1.0794	-.2439	.0732	.0067	.2905	.2307
19	1.1835	-.1694	.0508	.0067	.3611	.2281
20	1.2876	-.0881	.0264	.0067	.3914	.1976
21	1.3918	-.0000	.0000	.0067	.3727	.1389

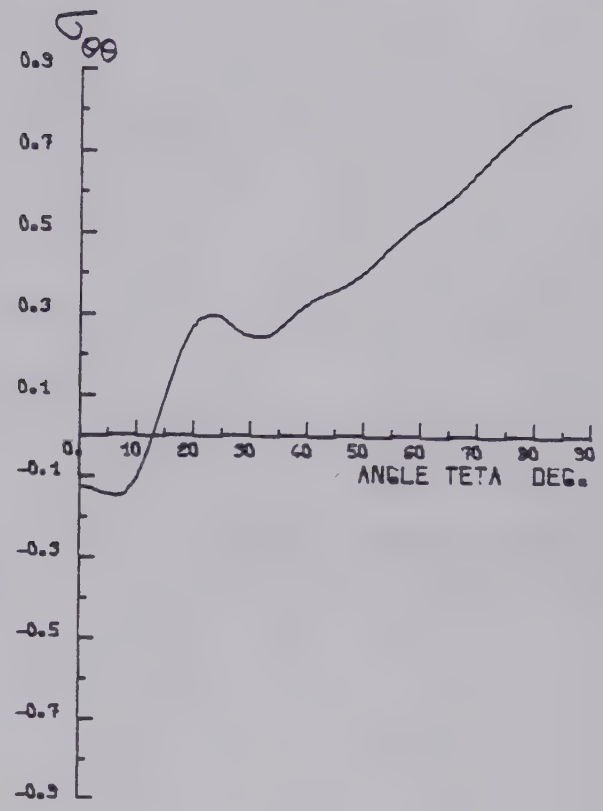
```
TOP* 0
**************************************************************************
PTIME VIRT REL ACT TRA CRM   FAULTS     INS    OUTS     RATE-P/S UC-E RL-E
0.018   50  40  35  03  20      19      00      00        17.30 2.29 2.35


57    STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
        03   00.01   21   11*43*01   14     00.01 11*42*58 TERM
**************************************************************************
**************************************************************************
  TIME       TIME*CORE       CORE-USE    TIME*DISC     DISC-USE
  00.60        24.69             93%       60.22          11%
```

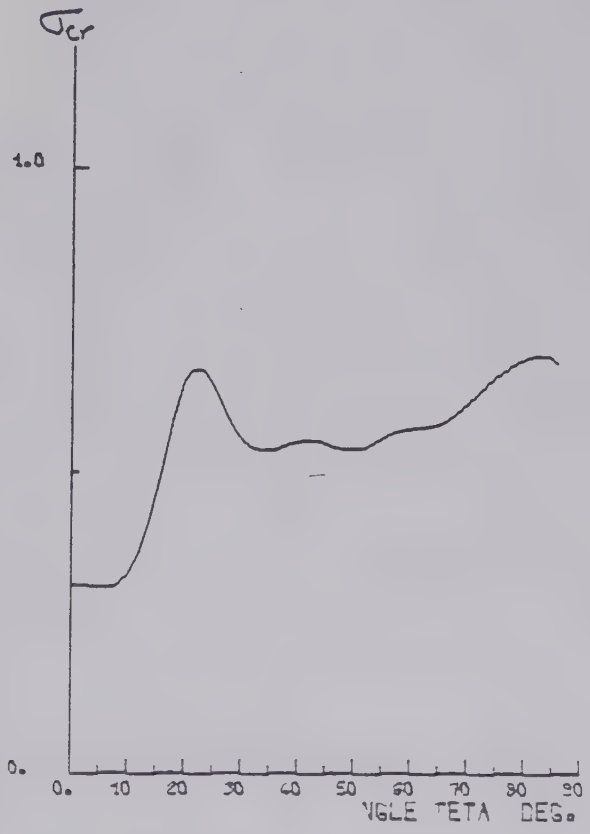
```
EPS=  .99999997E-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=     15.0596    ETA2=     60.1292    A=        .6490
```

I	T	XN	TN	SG	XT	SIGMAC
1	.0000	-.7148	.0000	.0000	-.5376	.4157
2	.0263	-.7143	.0201	.0000	-.5325	.4147
3	.0526	-.7130	.0402	.0000	-.5174	.4120
4	.0789	-.7107	.0603	.0000	-.4930	.4087
5	.1051	-.7076	.0804	.0000	-.4603	.4063
6	.1314	-.7036	.1005	.0000	-.4207	.4063
7	.1577	-.6986	.1206	.0000	-.3758	.4104
8	.1840	-.6928	.1407	.0000	-.3275	.4197
9	.2103	-.6861	.1608	.0000	-.2777	.4349
10	.2366	-.6785	.1809	.0000	-.2281	.4558
11	.2628	-.6699	.2010	.0000	-.1804	.4817
12	.3415	-.6391	.1917	.0000	-.0626	.4826
13	.4202	-.6002	.1801	.0000	.0053	.4608
14	.4988	-.5533	.1660	.0000	.0320	.4075
15	.5775	-.4983	.1495	.0000	.0478	.3415
16	.6561	-.4354	.1306	.0000	.0856	.2853
17	.7348	-.3644	.1093	.0000	.1621	.2540
18	.8135	-.2853	.0856	.0000	.2673	.2511
19	.8921	-.1982	.0595	.0000	.3683	.2586
20	.9708	-.1031	.0309	.0000	.4256	.2386
21	1.0495	-.0000	.0000	.0000	.4108	.1687

```
*STOP* 0
**********************************************************************
STPTIME VIRT REL ACT TRA CRM  FAULTS    INS   OUTS    RATE-P/S UC-E RL-E
  0.019   50  40  35  03  20      19     00     00       16.60 2.29 2.36


T645    STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
          03  00.01   21   11*17*39   14     00.01 11*17*36 TERM
**********************************************************************
**********************************************************************
     TIME       TIME*CORE       CORE-USE    TIME*DISC     DISC-USE
     00.62         25.39            94%       61.93          11%

   DS        DS              SHR       SHR          CR        CP        LP
```

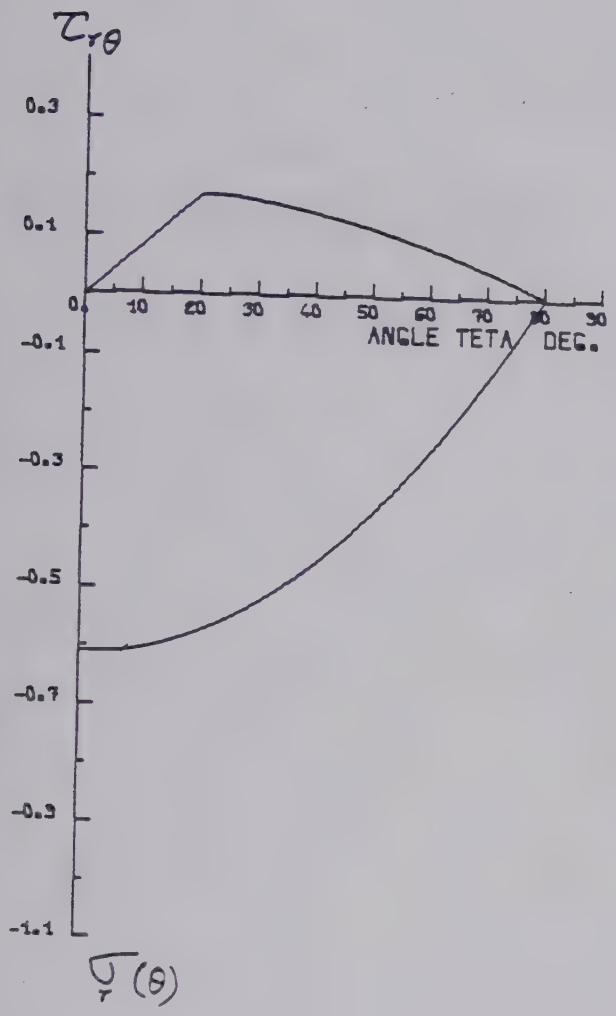


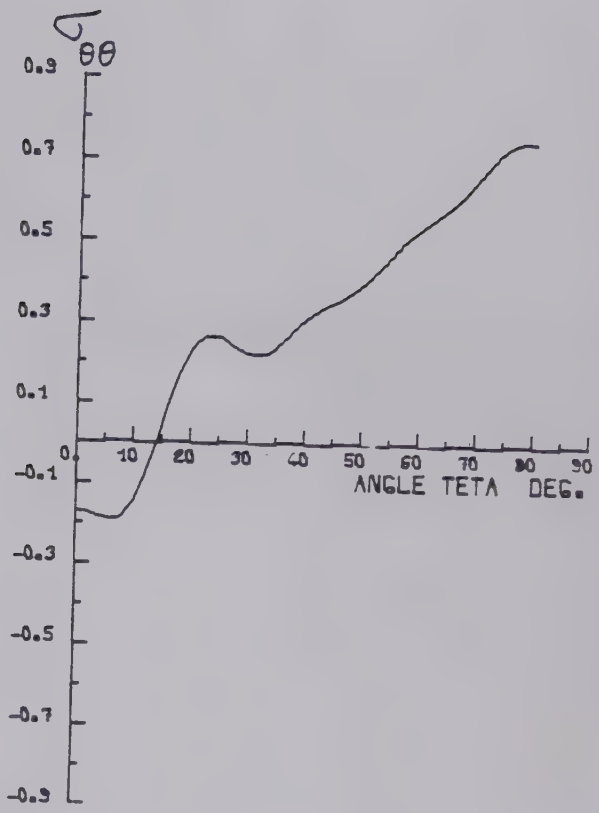


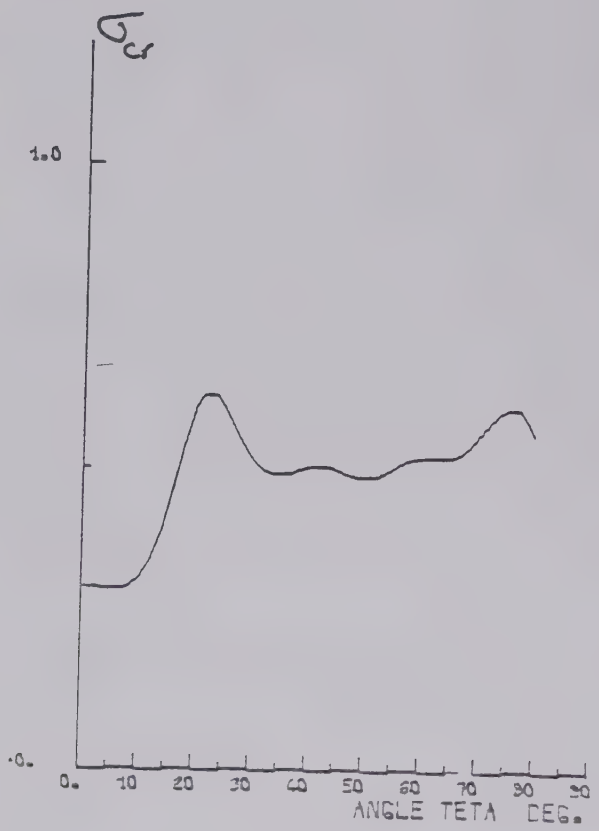


0,0003

COURBES 1

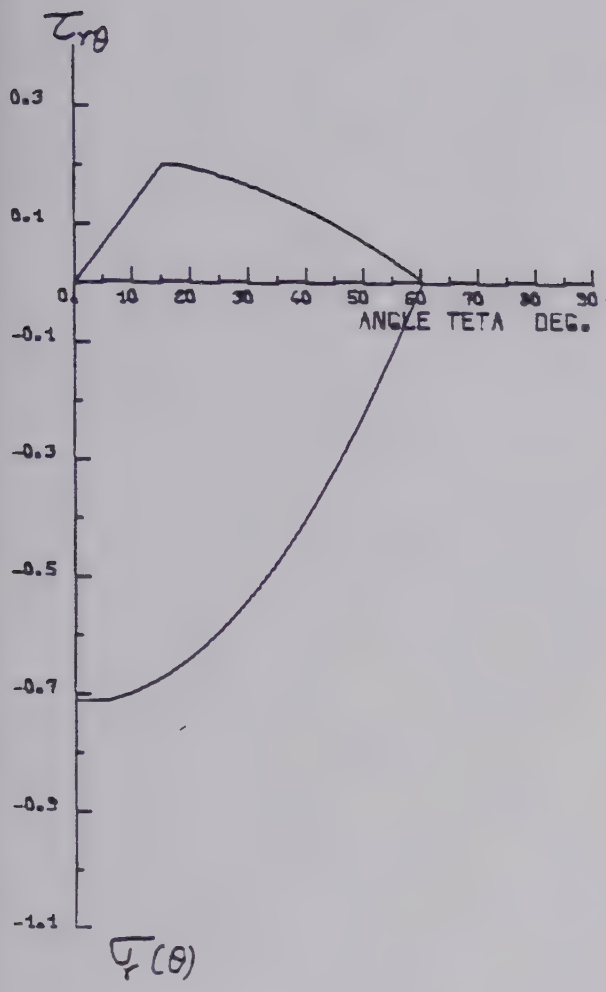


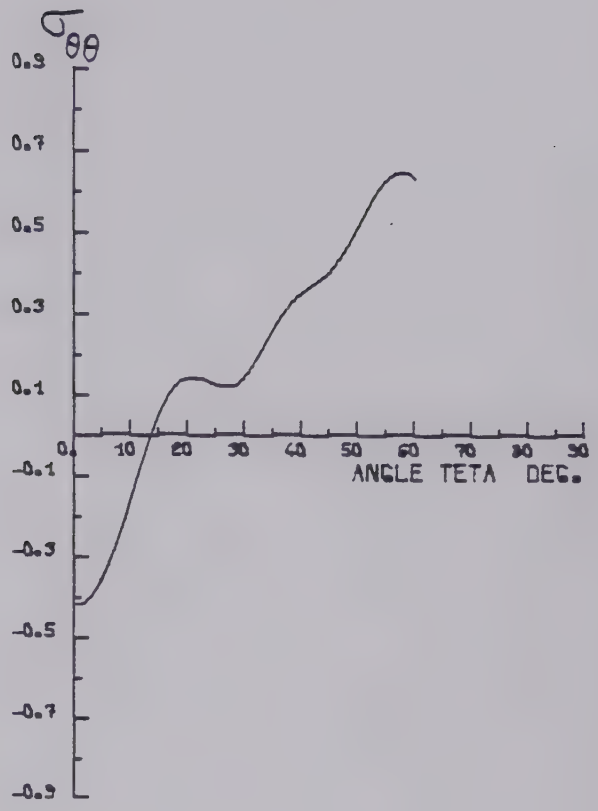


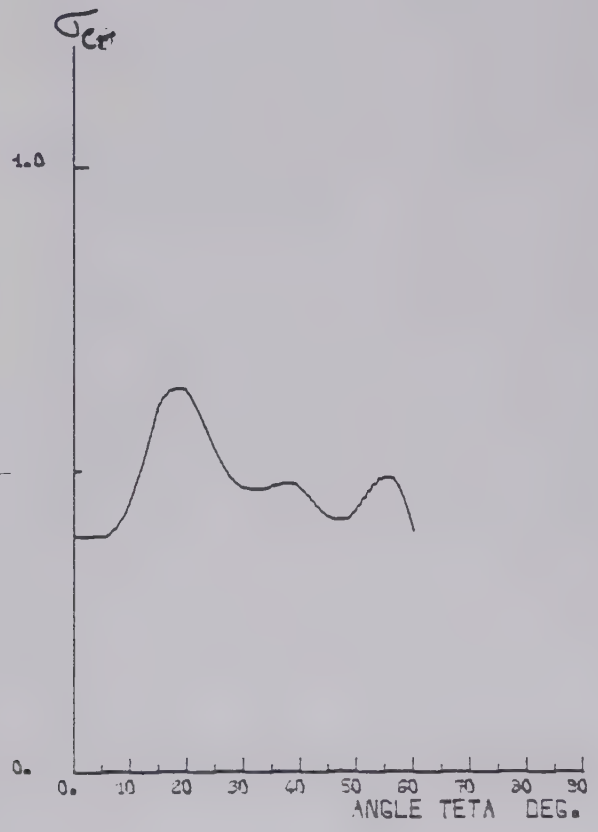


0,0005

COURBES 2

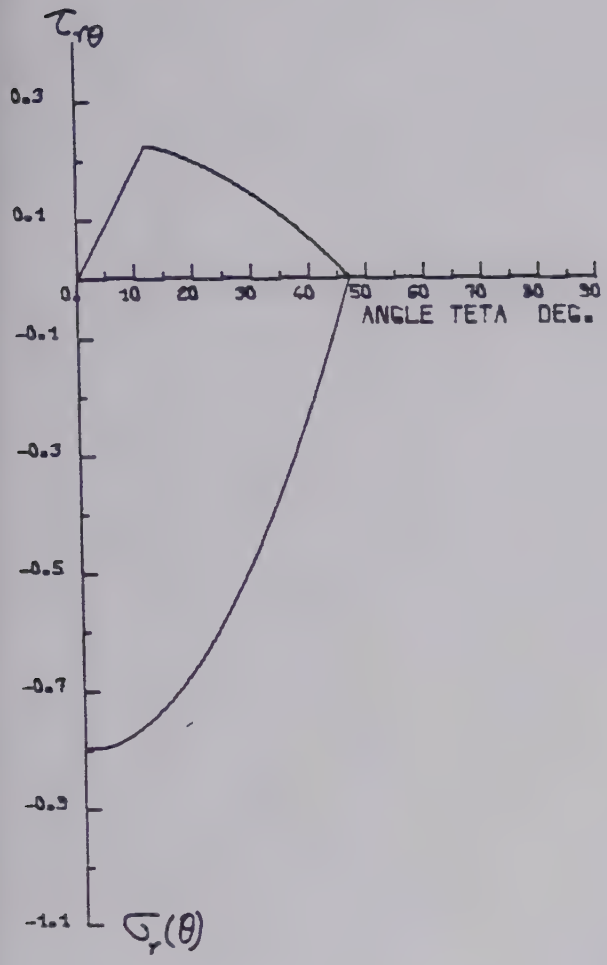


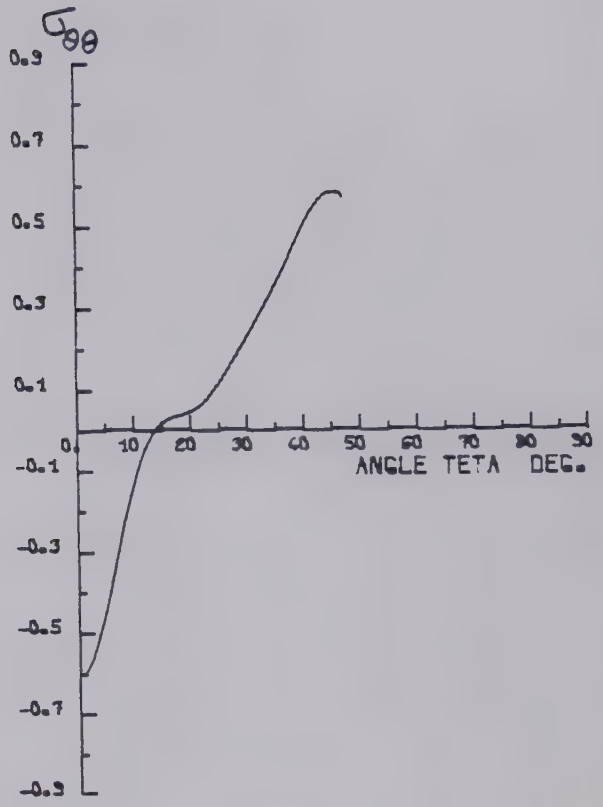


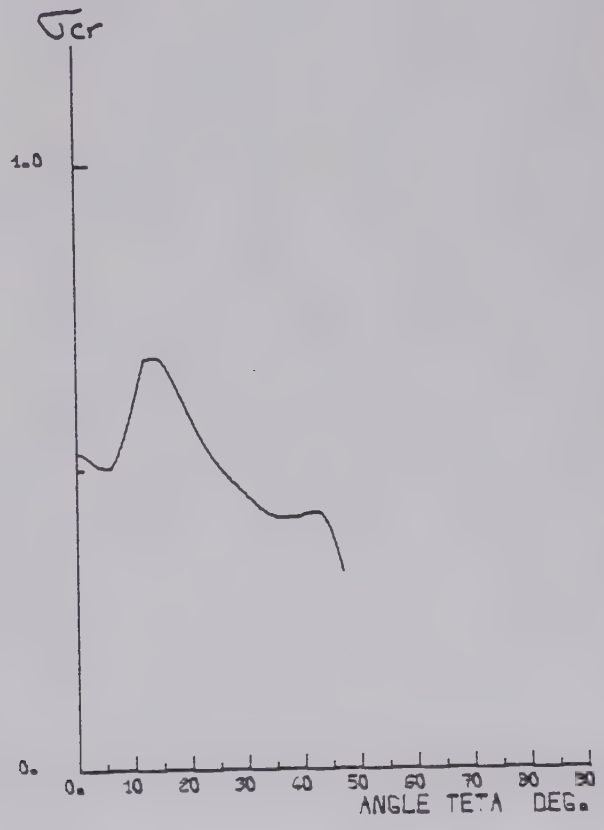


0.001

COURBES 3

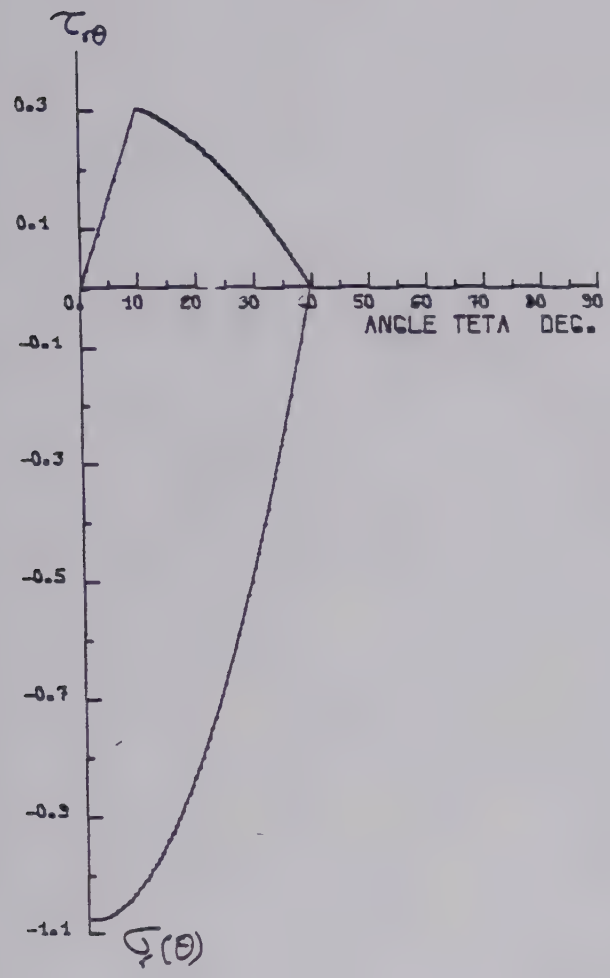


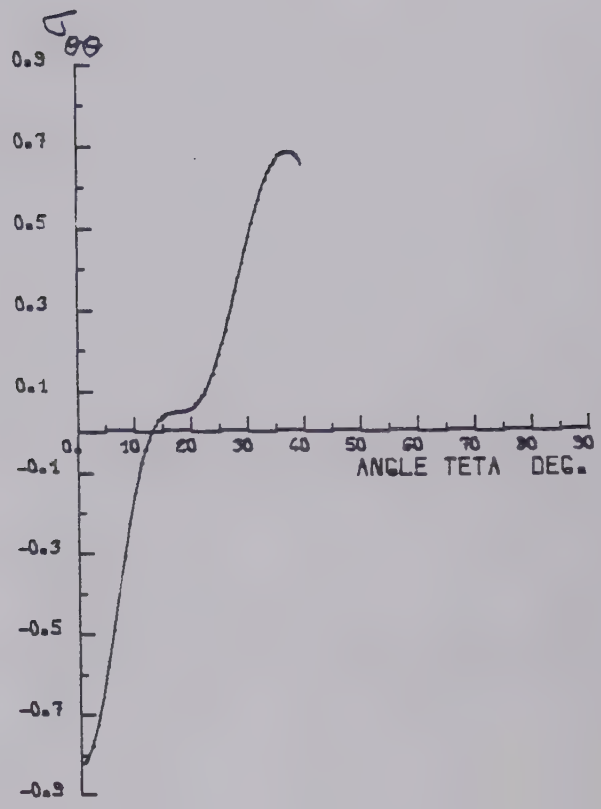


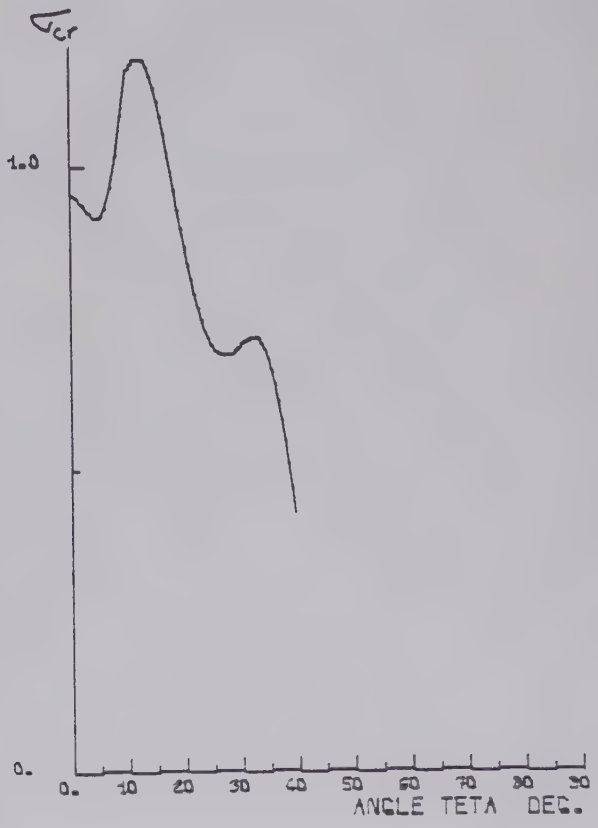


$\varepsilon = 0{,}002$

COURBES 4

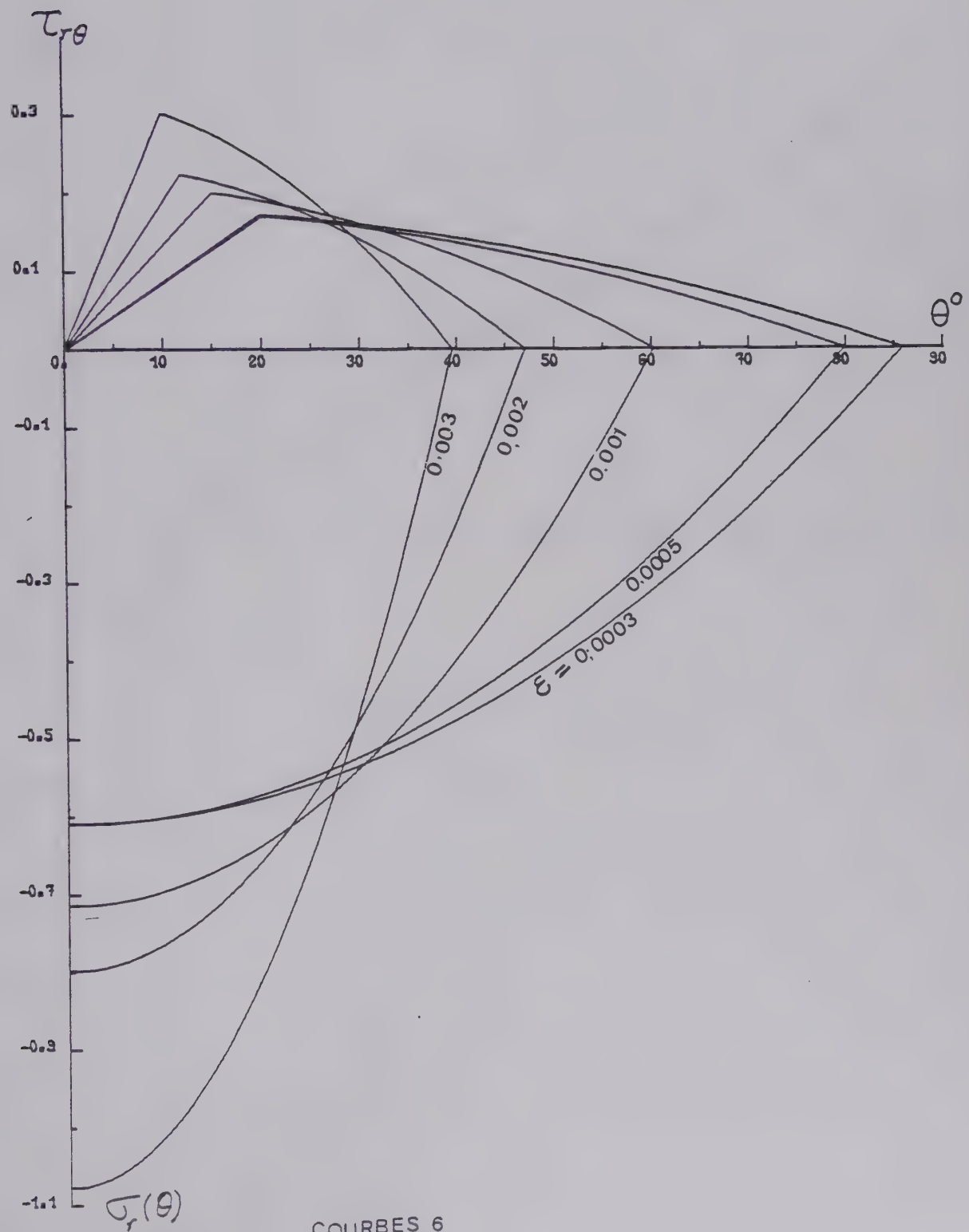




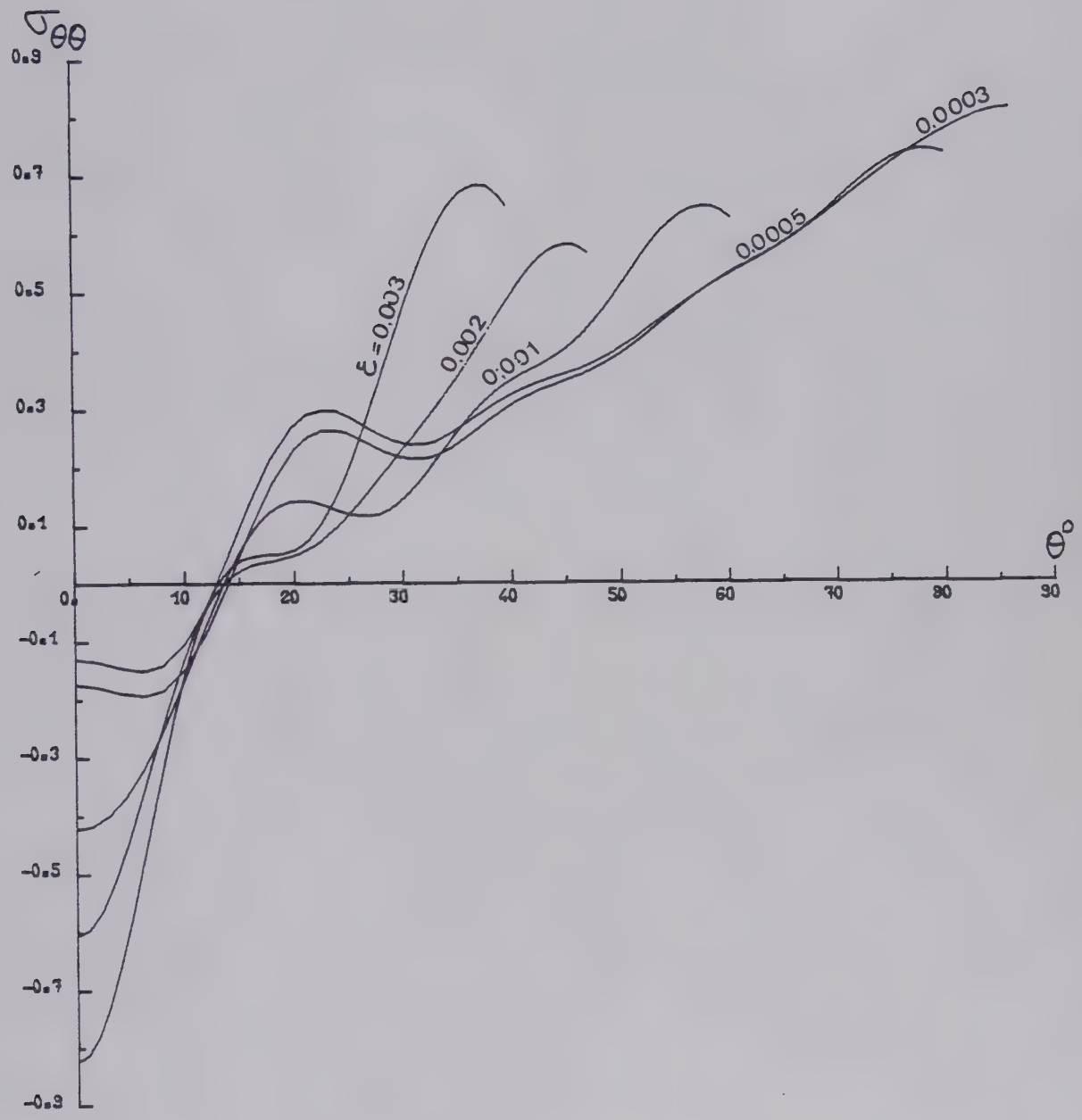


0,003

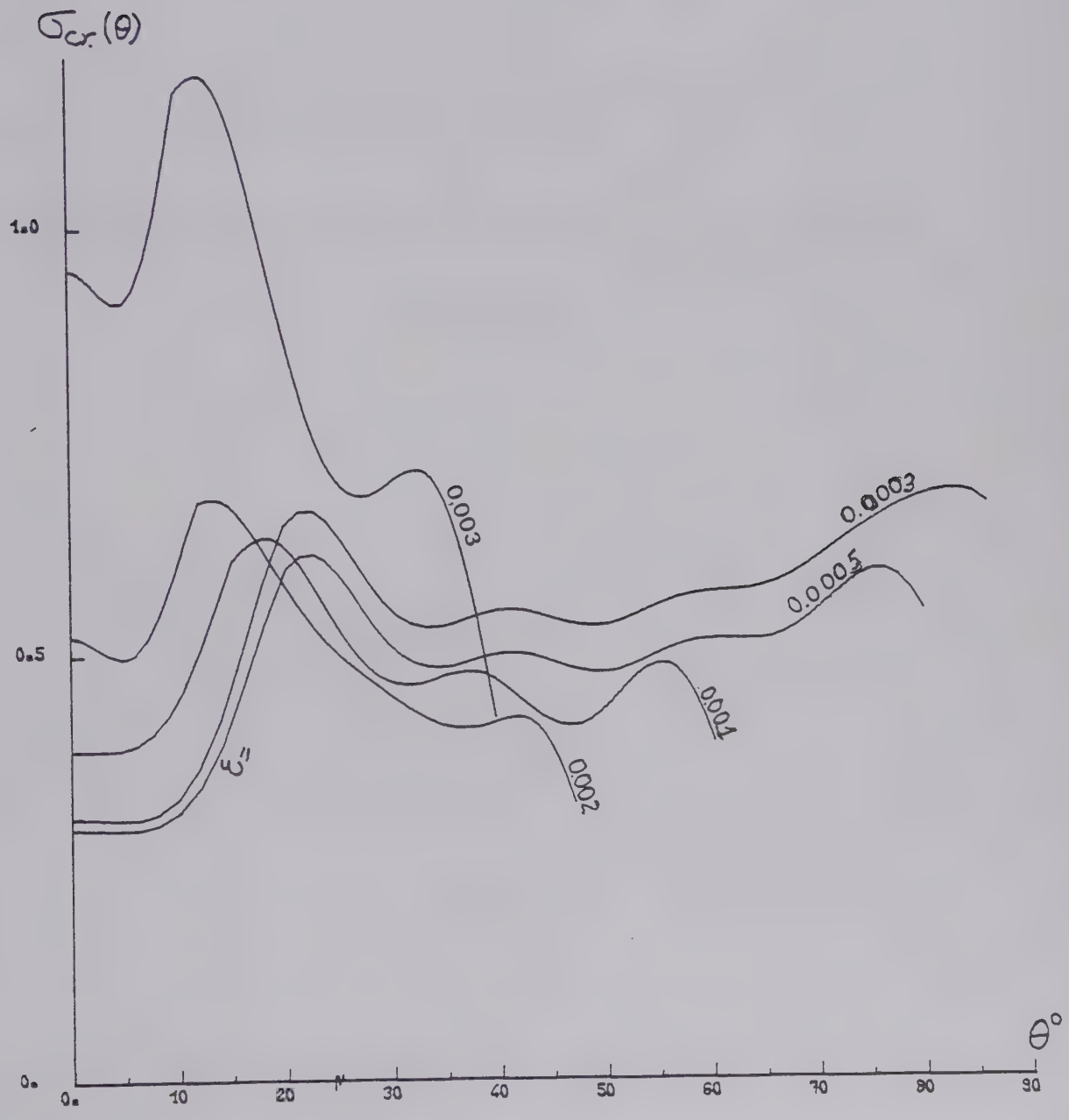
COURBES 5


$\tau_{r\theta}$
0.3
0.1
-0.1
-0.3
-0.5
-0.7
-0.9
-1.1
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
$\theta°$
0,003
0,002
0,001
0,0005
$\varepsilon = 0,0003$
$\sigma_r(\theta)$

COURBES 6


$\sigma_{\theta\theta}$
0.9
0.7
0.5
0.3
0.1
-0.1
-0.3
-0.5
-0.7
-0.9
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
$\theta°$
$\varepsilon = 0.003$
0.002
0.001
0.0005
0.0003

COURBES 7


$\sigma_{cr.}(\theta)$
1.0
0.5
0.
0.003
0.0003
0.0005
0.001
0.002
$\xi =$
0.
10
20
30
40
50
60
70
80
90
$\theta°$

COURBES 8

C H A P I T R E - IV-

APPLICATION A UN PROBLEME DE MICOMECANIQUE DES MORTIERS ET BETONS

--

1. - PRESENTATION DU PROBLEME.
2. - MODELISATION.
3. - NOTATIONS ET HYPOTHESES.
4. - APPROCHE THEORIQUE.
5. - CONDITION SUPPLEMENTAIRE.
6. - RESOLUTION NUMERIQUE APPROCHEE.
7. - RESULTATS ET CONCLUSION.

———

CHAPITRE - IV -

APPLICATION A UN PROBLEME DE MICOMECANIQUE DES MORTIERS ET BETONS

--

1 - PRESENTATION DU PROBLEME.

Les mortiers et bétons sont des solides hétérogènes, de nature complexe, constitués de phases multiples : matrice de liant hydraulique, bulles d'air incluses, pores ouverts, granulats de dimension et de nature minéralogique différents, eau, etc...

Les propriétés mécaniques de ces matériaux résultent principalement de ces multiples paramètres et beaucoup de recherches s'orientent vers l'analyse des performances des mortiers et bétons prenant en compte leur nature véritable dans toute leur complexité. Cette orientation n'est pas gratuite mais nécessaire dans les structures où les sollicitations du matériau sont complexes, ou bien dans le cas d'ambiances difficiles. Citons par exemple :

- les enceintes de réacteurs nucléaires,
- les tours réfrigérantes des centrales,
- les ouvrages d'art précontraints longitudinalement et transversalement,
- les plateformes de forage en mer.

Les travaux antérieurement développés quant à l'étude de la résistance des bétons présentaient un caractère incomplet et imprécis, essentiellement parce que poursuivis dans le cadre de l'hypothèse d'homogénéité et de continuité, qui rendait fragmentaire, voire inexploitable les résultats publiés dans la littérature scientifique correspondante.

C'est pourquoi, les mécaniciens des mortiers et bétons ont choisi de préciser davantage les performances de ces matériaux enparticulier en tenant compte de l'hétérogénéité.

.../...

2. - MODELISATION.

La méthode retenue adaptée à ces objectifs procède en général [LO] d'une double démarche. Elle consiste en effet à conjuguer l'étude expérimentale des propriétés mécaniques des matériaux (approche globale) avec une approche locale, et à comparer les résultats.

Il est donc indispensable de posséder une bonne approximation de la distribution des contraintes au sein des mortiers et bétons.

La plupart des études ont recours à une schématisation [MA], [DA] [RO] qui consiste à considérer ces derniers comme un solide élastique à deux phases. La première phase est constituée par des granulats eux mêmes schématisés sous forme de cylindres, ou de sphères pour simplifier encore le problème. La seconde phase est constituée par la matrice de liant hydraulique (pâte de ciment hydratée).

Chacune de ces phases est supposée continue, homogène, élastique linéaire. Leur association peut être de nature variable : on distingue usuellement deux cas fondamentaux, celui de l'adhérence parfaite des deux phases, au sens du soudage des mécaniciens, et celui de la non adhérence. Cette dernière situation correspond à une rupture des liaisons de continuité entre pâte et agrégat [FA].

La première situation est bien connue et non répétée ici. Elle est même généralisée à des milieux "périodiques" à travers la méthode d'homogénéisation. Revenons à la seconde.

Dans lecas de l'élastostatique plane, on suppose que les granulats se réduisent à la section droite d'un cylindre à base circulaire et dans le cas de l'élastostatique tridimensionnelle chaque granulat est représenté par une sphère.

Il est dans l'état actuel des recherches impossible de discuter du mérite relatif des deux schémas, bien que l'on s'oriente vers un modèle physique tridimensionnel ce qui semble logique.

Nous avons pensé que notre réflexion sur les problèmes de contact non hertzien pouvait se prolonger au problème plan et serve pour le choix d'un critère local à retenir dans le cas tridimensionnel avec prise en compte du frottement de Coulomb.

3. - NOTATIONS ET HYPOTHESES.

Vu la distribution et la forme aléatoire des agrégats le problème est schématisé de la façon suivante : la pâte est un milieu infini et l'agrégat est un cylindre, le milieu étant soumis à des sollicitations de traction-compression uniaxiale ou biaxiale.

Le modèle plan semble constituer une bonne approche et peut être vérifié expérimentalement.

Les deux solides n'étant pas soudés on est conduit à un problème de contact large de même type que celui précédemment étudié. Dans certains calculs où le frottement n'intervient pas le problème peut être résolu à l'aide de séries de Fourier. Cette technique peut être longue et parfois imprécise

bien que présentant l'avantage de déterminer les contraintes et les déplacements dans tout le milieu. L'introduction du frottement la complique notablement.

Nous considérons une traction monoaxiale P, ce qui peut être généralisé ; l'arc de contact comporte une zone d'adhérence $(-\alpha_1, \alpha_1)$ et une zone de glissement (α_1, α_2), $(-\alpha_1, -\alpha_2)$. Dans ces deux parties on exploite la loi de Coulomb comme au chapitre II.

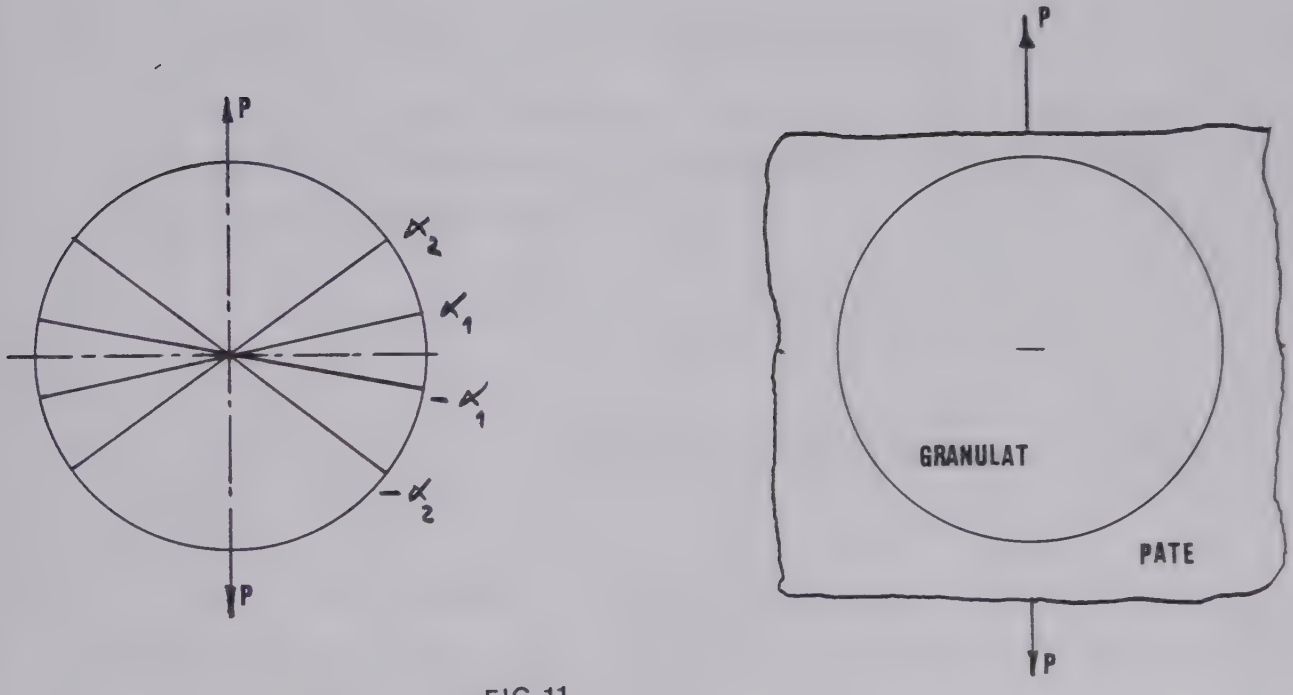


FIG 11

4. - APPROCHE THEORIQUE.

Les potentiels complexes respectifs de l'agrégat et la plaque s'écrivent : (en reprenant les notations du chapitre II)

$$\Phi_o(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t) + i\,\tau(t)}{t - z}\, dt + A$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t) + i\,\tau(t)}{t - z}\, dt + \frac{P}{4} + \frac{P}{2Z^2}$$

avec $A = -\frac{1}{4i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t)\, dt}{t}$ quantité proportionnelle à la valeur moyenne de la contrainte normale.

N.B. les potentiels précédents sont tout à fait classiques. Dans la partie adhérente les déplacements des deux solides sont égaux. On écrit donc

$$\frac{1}{\mu_o}(K_o\,\Phi^+ + \Phi^-) = \frac{1}{\mu_1}(K_1\,\Phi^- + \Phi_1{}^+)$$

où les limites Φ^+, Φ^- sont évaluées à partir des formules de Plemelj.

En supposant l'agrégat rigide $\mu_o = \infty$ afin de ne pas alourdir les calculs et ce qui constitue une hypothèse physique, on obtient après quelques manipulations :

$$-\left|\frac{K_1 - 1}{2\mu_1}\right| (\sigma(t_o) + i\,\tau(t_o)) + \frac{K_1 + 1}{2\mu_1} \frac{1}{i\pi} \int_\gamma \frac{\sigma(t) + i\,\tau(t)}{t - t_o}\, dt$$

$$-\frac{K_1 + 1}{2\mu_1}\left(\frac{P}{2} + \frac{P}{t_o{}^2}\right) = 0$$

Soulignons que cette équation n'est valable que sur la partie adhérente bien que l'intégrale porte sur la totalité de l'arc de contact :

Posons pour simplifier : $\frac{K_1-1}{\mu_1} = k_1$ et $\frac{K_1+1}{2\mu_1} = k_2$

En prenant l'expression conjuguée de l'équation précédente on peut établir une nouvelle équation :

$$\frac{k_1}{2k_o}\left(\sigma(t_o) - i\,\tau(t_o)\right) + \frac{1}{1\pi}\int_\gamma \frac{\sigma(t)-i\tau(t)}{t-t_o}\,dt - 4A + \frac{P}{2} + pt_o^2 = 0$$

et par suite par combinaison des deux relations on obtient :

$$\frac{k_1}{k_2}\sigma(t_o) - \frac{1}{\pi}\int_\gamma \frac{2\,\tau(t)}{t-t_o}\,dt - 4A + p + P\left(t_o^2 + \frac{1}{t_o^2}\right) = 0$$

On peut de même trouver une autre équation mais inutile comme nous le verrons dans la suite :

Posons alors $t_o = e^{i\theta_o}$, $t = e^{i\theta}$ dès lors

$\frac{dt}{t-t_o} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Cotg}\,(\theta-\theta_o) + i\,\frac{d\theta}{2}$ et l'on obtient l'équation définitive réelle :

I

$$\sigma(\theta)\frac{k_1}{k_2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_2}^{\pi+\alpha_2} \tau\,\mathrm{Cotg}\left(\frac{\theta-\theta_o}{2}\right)d\theta - \frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha_2}^{\pi+\alpha_2} \tau\,\mathrm{Cotg}\left(\frac{\theta-\theta_o}{2}\right)d\theta$$
$$- 4A + P\,(1 + 2\,\mathrm{Cos}\,2\theta) = 0$$

Dans la zone de glissement on peut écrire comme condition aux limites que le déplacement radial est nul. En effet en revenant à la relation liant les déplacements exposée au chapitre I on a S = O il n'y a pas pénétration et d'autre part $R_1 = R_o$ d'où U = O.

On aboutit aussi en suivant la même méthode préconisée par Astre et après passage à la variable réelle à l'équation :

$$\frac{k_1}{2k_2}\left(\sigma(\theta_o) - \frac{d\tau(\theta_o)}{d\theta_o}\right) + \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha_2}^{+\alpha_2}\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} + \tau(\theta)\right)\operatorname{Cotg}\left(\frac{\theta_o-\theta}{2}\right)d\theta +$$

$$\text{II}\qquad \int_{\pi-\alpha_2}^{\pi+\alpha_2}\left(\frac{d\sigma(\theta)}{d\theta} + \tau(\theta)\right)\operatorname{Cotg}\left(\frac{\theta_o-\theta}{2}\right)d\theta + 4A + P\,(1 + 6\cos 2\theta) = 0$$

Remarques :

1) les équations I et II sont couplées vis à vis des inconnues σ et τ , dans la seconde figure les dérivées de ces quantités, nous supposerons dans les calculs quelles sont régulières.

2) L'équation II est à la fois valable dans la zone d'adhérence et la zone de glissement, c'est pour ceci que nous n'avons pris en considération qu'une seule équation dans la partie adhérente.

5. - CONDITIONS SUPPLÉMENTAIRES.

Dans le problème relatif aux paliers nous avons obtenu deux relations similaires aux équations I et II et nous avons tenu compte de l'équilibre $\int_\gamma (\sigma_r \cos\theta - \tau\sin\theta)d\theta = P$ pour déterminer les inconnues.

Ici la situation est différente. Il n'y a pas de

pénétration et de plus. Vue la symétrie du problème, l'équilibre est automatiquement vérifié.

Dans l'équation I nous avons traduit l'adhérence par l'égalité des déplacements c'est à dire U = O, V = O mais en fait à cause de l'utilisation de la méthode des potentiels complexes nous avons écrit plus précisément $\frac{du}{d\theta} = O$, $\frac{dv}{d\theta} = O$. Il faut donc ajouter des conditions subsidiaires par exemple $U(R,O) = O$, $V(R,O) = O$, la seconde est nécessairement vérifiée par symétrie. Il reste la seule condition $U(R,O) = O$ indépendamment des lois de Coulomb.

A cet effet nous allons déterminer le déplacement radial sous forme de série de Fourier :

Posons sous réserve de convergence

$$\sigma(\theta) = A_o + \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} \operatorname{Cos} 2n\theta$$

$$\tau(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sin 2n\theta$$

Vu la parité et l'imparité de $\sigma(\theta)$ et de $\tau(\theta)$ et en tenant compte des symétries

Posons de même $\Phi(z) = \sum_{K=O}^{\infty} a_K z^{-K}$, $\Psi(z) = \sum_{K=O}^{\infty} \grave{a}_K z^{-K}$

les exposants sont négatifs pour obtenir des solutions finies. Ces choix sont longuement justifiés dans [MU].

Alors en partant de la relation :

$$\sigma - i\tau = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}\left|\overline{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right|$$

et en utilisant un procédé d'identification classique, on

détermine les coefficients a_n et a'_n en fonction des coefficients A_0, A_{2n}, B_{2n}. D'autre part on a

$$2\mu(U + iV) = e^{i\theta}\left|K\,\Phi(z) - z\,\overline{\Phi(z)} - \overline{\Psi(z)}\right|$$

relation qui permet de calculer les composants U et V du déplacement sous forme de série de Fourier en fonction des coefficients A_0, A_{2n}, B_{2n}.

Après un calcul long non explicité ici on trouve que la conditin U (R ,O) = O se traduit par

$$A_0 - \left(\frac{3}{4}K_1 + \frac{1}{2}\right) + \sum_{2}^{\infty}\left\{\frac{A_{2n}}{2}\left|\frac{K_1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}\right| - \frac{B_{2n}}{2}\left|\frac{K_1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right|\right\} = 0$$

Du point de vue numérique la série sera par la suite tronquée et nous estimerons les coefficients inconnues A_0, A_{2n}, B_{2n}.

6. - RÉSOLUTION NUMÉRIQUE APPROCHEE.

Comme au chapitre III nous allons a priori donner une fonction pouvant décrire l'état des contraintes normales et de même une autre fonction relative aux contraintes tangentielles. Si dans le cas du palier on possède des résultats théoriques et expérimentaux assez nombreux pour décrire de façon approchée l'état des contraintes. Le problème est ici plus délicat surtout en ce qui concerne la contrainte tangentielle.

La contrainte normale est approchée encore par une fonction parabolique $\sigma(\theta) = a\,(\theta^2 - \alpha_2{}^2)$

Ce choix est légitime en égard aux résultats théoriques et expérimentaux trouvés dans le cas sans frottement. On peut aussi justifier en partie cette approche à travers un résultat dû à Glodwell [GL] concernant un agrégat rigide pressé entre deux plans élastiques. L'agrégat est symétrique par rapport aux axes OX et OY. A l'aide de polynômes de Chebycheff, l'auteur montre que la répartition de la contrainte normale au contact

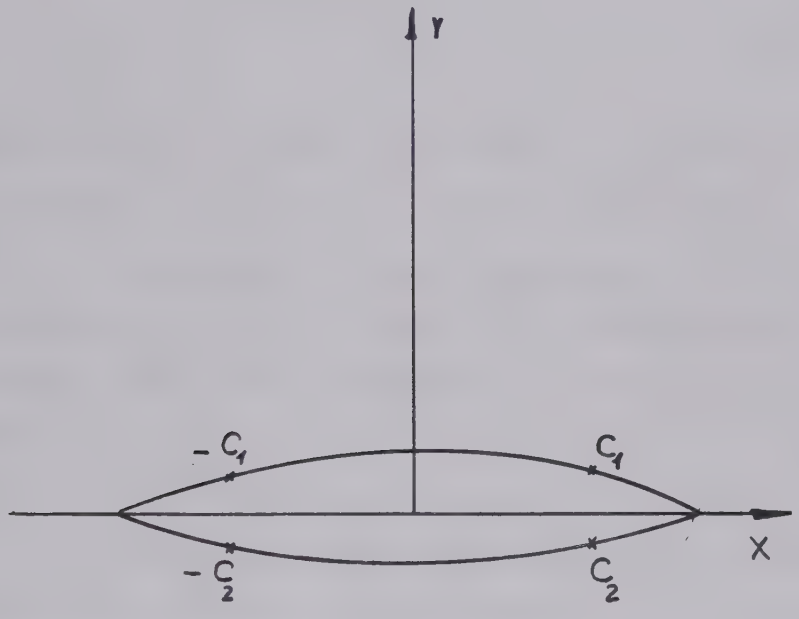


FIG 12

(en négligeant le frottement) est de la forme : $\sigma(x) = (C^2 - x^2)^{1/2}$ où la constante C représente la demi largeur de contact. Remarquons au passage que cette expression est assez semblable à celle de Hertz concernant le contact extérieur cylindre-cylindre bien que dans un cas le contact soit large et dans l'autre étroit.

Faute d'informations plus précises nous écrirons encore que dans la zone d'adhérence la contrainte tangentielle est de la forme $\tau(\theta) = b\theta$

Dans ces conditions les inconnues sont les angles α_1, α_2 et les constantes a et b. Si l'on admet que la contrainte tangentielle est continue ce qui n'est pas sûr (il existe par exemple en plasticité des discontinuités de cette contrainte)

On a $$b = \frac{-af(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_1}$$

expression dans laquelle f désigne le coefficient de frottement. Il reste donc trois coefficients indépendants.

Il suffit alors de substituer $\sigma(\theta)$ et $\tau(\theta)$ dans les équations I et II ; on utilise en fait pour des raisons déjà indiquées deux fois l'équation II une fois dans la zone d'adhérence $\tau(\theta) = b\theta$ et une fois dans la zone de glissement $\tau(\theta) = - f\ \sigma(\theta)$.

Nous n'avons pas explicité ici ces trois équations immédiates à établir, mais longues et du même type que celles rencontrées au chapitre III : I', II', II".

De même les coefficients A_o, A_{2n}, B_{2n} peuvent être facilement calculés. On trouve :

$$A_o = \frac{-4}{3\pi} \left| a\ \alpha_2^3 \right|$$

$$A_{2n} = \frac{8a}{\pi} \left| \alpha_2 \frac{\cos 2n\alpha_2}{4n^2} - \frac{\sin 2n\alpha_2}{8n^3} \right|$$

$$B_{2n} = \frac{-8a}{\pi} f \left| \frac{2\sin 2n\alpha_1}{4n^2} + \frac{\cos 2n\alpha_2}{8n^3} - \frac{\alpha_1 \sin 2n\alpha_1}{4n^2} - \frac{\cos 2n\alpha_1}{8n^3} \right| + \frac{4b}{\pi} \left| \frac{\sin 2n\alpha_1}{4n^2} - \frac{\alpha_1 \cos 2n\alpha_1}{2n} \right|$$

Dans le calcul de B_{2n} il faut distinguer la partie adhérante et la partie glissante. Dans les séries du point de vue numérique nous n'avons retenu que les dix premiers termes.

On obtient ainsi un système non linéaire des quatre équations 3 équations intégro-différentielles et la condition géométrique : $U(R,O) = 0$, à trois inconnues par exemple a, α_1, α_2 puisqu'il existe une relation entre a, b, α_1, α_2.

Nous avons encore ici utilisé la méthode de quadratisation partielle déjà décrite.

Le calcul a été fait avec un agrégat rigide et la matrice de pâte de ciment pure $E = 30000$ daN/mm^2, $\nu = 0{,}2$, les valeurs initiales sont celles que l'on peut calculer dans le cas où le frottement est nul exactement de la même façon que celle utilisée pour les paliers.

Le critère de résistance retenu et celui de Von Mises

$$\sigma_{\theta\theta}^{\ 2} + \sigma_{rr}^{\ 2} - \sigma_{rr} \cdot \sigma_{\theta\theta} + 3\tau_{r\theta}^{\ 2} \leqslant k^2$$

la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ étant évaluée sous forme de série de Fourier

.../...

7. - RESULTATS ET CONCLUSION.

Nous avons volontairement considéré des coefficients de frottement élevés, plus précisément cinq valeurs f = 0.6, 0.8, 1, 1.2, 1.5. Il est impossible d'évaluer avec précision la valeur de ce coefficient entre pâte et agrégat, mais il est sans doute nettement plus grand que dans les mécanismes où l'on cherche par plusieurs procédés à éviter ou à rendre minimum ce dernier. Le frottement ne joue pas a priori un rôle essentiel dans la mécanique de bétons et on ne s'est pas intéressé à cet aspect.

Nous avons représenté l'évolution des contraintes σ_r, σ_θ ainsi que celle du critère de Von Mises dans ces cinq situations (figures 9,10 ,11 , 12,13).

Il est logique que lorsque le coefficient de frottement augmente la zone d'adhérence augmente et que la zone de contact globale diminue. Cette remarque est mise en évidence (figure14).

Le point plus important concerne le critère de résistance ; si le frottement passe de 0.6 à 1.5 le critère de Von Mises augmente dans une proportion de 15 (figure 16) On peut donc en déduire qu'il est erroné de négliger le frottement et que ce dernier joue un rôle fondamental dans les processus de rupture d'amorces de fissures, etc... Ce point de vue semble nouveau ; certaines études expérimentales [CA] montrent par ailleurs en retenant le schéma physique proposé ; charge monoaxiale, agrégat cylindrique que la fissure ne s'amorce pas à partir de l'angle $\theta = 0$ comme il semblerait mais d'un angle nettement plus grand.

Nous avons comparé les valeurs de σ_θ (figure 8) ainsi que les répartitions des contraintes normales et tangentielles dans le cas sans frottement et le plus grand coefficient f = 1.5 (figure 9). Enfin nous avons représenté figure 10) les variations des angles α_1 et α_2 en fonction de f, ainsi que celles de la contrainte tangentielle maximum et du critère de Von Mises.

L'étude précédente méritera toutefois d'être confirmée dans le cas d'un chargement biaxial, d'un agrégat non rigide (ce qui est une simple généralisation des calculs précédents) et d'étudier le problème relatif à l'agrégat sphérique.

Nous donnons ici les tableaux des résultats obtenus par ordinateur avec les données de coefficient de frottement

$$f = 0.6,\ 0.8,\ 1.0$$

où

T = Angle (rad)

XN = σ (contrainte normale)

TN = τ_θ (contrainte tangentielle)

XT = σ_θ (contrainte circulaire)

SIGMAC = K = $\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 - \sigma_r \sigma_\theta + 3\tau_{r\theta}^2$

```
EPS=  .99999997E-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=      2.0000    ETA2=     20.0000    A=      2.8724
```

I	T	XN	TN	XT	SIGMAC
1	.0000	-.3500	.0000	-.0322	.1123
2	.0035	-.3500	.0208	-.0321	.1136
3	.0070	-.3499	.0416	-.0318	.1175
4	.0105	-.3497	.0624	-.0314	.1239
5	.0140	-.3494	.0832	-.0309	.1330
6	.0175	-.3491	.1039	-.0302	.1447
7	.0209	-.3487	.1247	-.0293	.1589
8	.0244	-.3483	.1455	-.0283	.1758
9	.0279	-.3478	.1663	-.0271	.1952
10	.0314	-.3472	.1871	-.0257	.2173
11	.0349	-.3465	.2079	-.0242	.2419
12	.0663	-.3374	.2024	-.0033	.2356
13	.0977	-.3226	.1935	.0308	.2273
14	.1292	-.3021	.1813	.0771	.2190
15	.1606	-.2759	.1656	.1330	.2128
16	.1920	-.2441	.1465	.1931	.2084
17	.2234	-.2066	.1240	.2499	.2029
18	.2548	-.1635	.0981	.2943	.1903
19	.2862	-.1147	.0688	.3175	.1645
20	.3177	-.0602	.0361	.3127	.1241
21	.3491	-.0000	.0000	.2768	.0766

```
*STOP* 0
**********************************************************************
```

STPTIME	VIRT	REL	ACT	TRA	CRM	FAULTS	INS	OUTS	RATE-P/S	UC-E	RL-E
0.012	50	40	35	03	19	19	00	00	25.74	2.31	2.34

T611	STEP	WAIT	CORE	END	DISC	TIME	START	CODE	PROGRAM
	03	00.01	21	15*39*18	14	00.01	15*39*14	TERM	

```
**********************************************************************
**********************************************************************
```

TIME	TIME*CORE	CORE-USE	TIME*DISC	DISC-USE
00.69	28.34	93%	69.12	11%

```
EPS=  .99999997E-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=      2.0000    ETA2=     18.0000    A=      4.0528
```

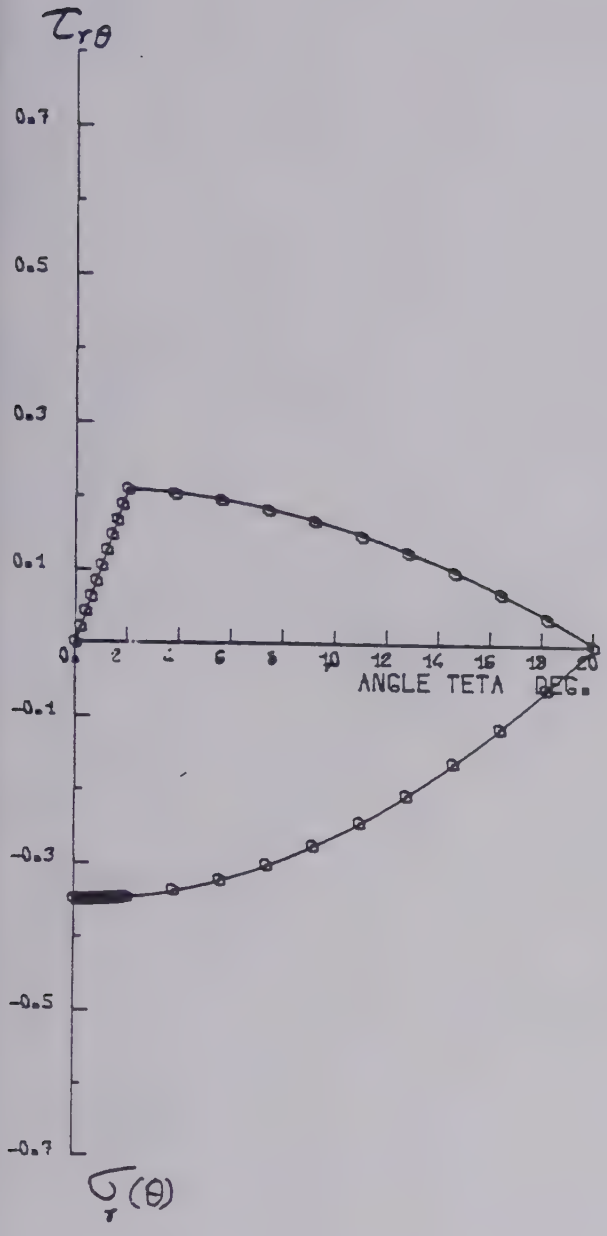
I	T	XN	TN	XT	SIGMAC
1	.0000	-.4000	.0000	.0495	.1823
2	.0035	-.4000	.0316	.0497	.1853
3	.0070	-.3998	.0632	.0503	.1945
4	.0105	-.3996	.0948	.0513	.2097
5	.0140	-.3992	.1264	.0527	.2311
6	.0175	-.3988	.1580	.0544	.2586
7	.0209	-.3982	.1896	.0565	.2922
8	.0244	-.3976	.2212	.0590	.3319
9	.0279	-.3968	.2528	.0619	.3777
10	.0314	-.3960	.2844	.0652	.4296
11	.0349	-.3951	.3160	.0688	.4876
12	.0628	-.3840	.3072	.1101	.4850
13	.0908	-.3666	.2933	.1702	.4839
14	.1187	-.3429	.2743	.2429	.4856
15	.1466	-.3129	.2503	.3202	.4886
16	.1745	-.2765	.2212	.3933	.4868
17	.2025	-.2339	.1871	.4531	.4710
18	.2304	-.1849	.1479	.4912	.4319
19	.2583	-.1296	.1037	.5010	.3649
20	.2862	-.0680	.0544	.4784	.2749
21	.3142	-.0000	.0000	.4226	.1786

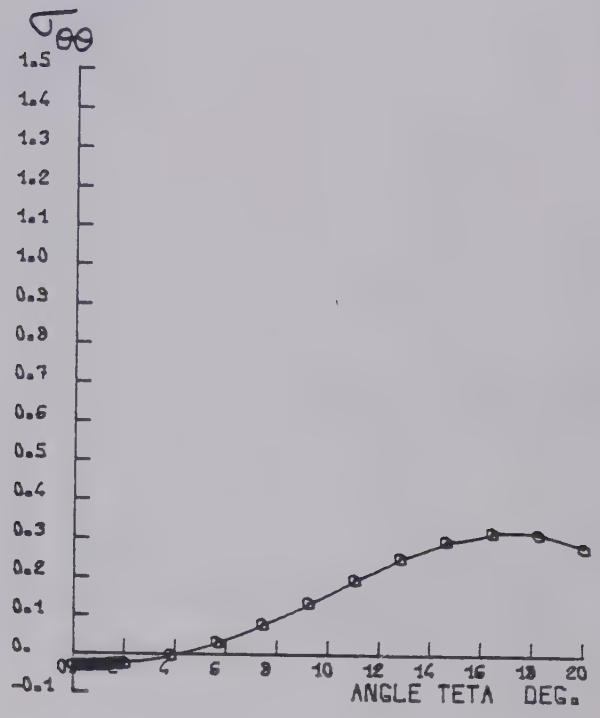
```
*STOP* 0
**********************************************************************
STPTIME VIRT REL ACT TRA CRM  FAULTS    INS   OUTS    RATE-P/S UC-E RL-E
  0.013   50  40  35  03  19      19     00    00       23.69 2.31 2.33


T828   STEP  WAIT  CORE     END     DISC     TIME    START  CODE  PROGRAM
         03  00.00   21  17*03*57   14     00.01 17*03*54 TERM
**********************************************************************
**********************************************************************
     TIME       TIME*CORE       CORE-USE    TIME*DISC     DISC-USE
     00.79        32.68            93%       79.71          11%
```

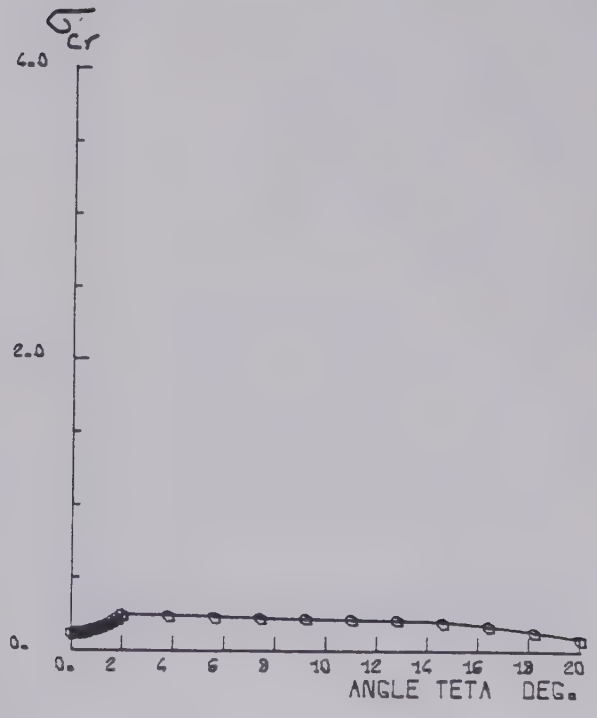
```
EPS=  .99999997F-05     EPS4=  .100E-05
ITM= 20     K1M= 10     K2M= 10     K3M= 10     K4M= 10
PAS INITIAL          1          .0100
PAS INITIAL          2          .0100
PAS INITIAL          3          .0100
PAS INITIAL          4          .0100
PAS INITIAL          5          .0100
PAS INITIAL          6          .0100
ETA1=      3.2000    ETA2=     14.4000    A=      7.8812
```

I	T	XN	TN	XT	SIGMAC
1	.0000	-.4978	.0000	.1151	.3184
2	.0056	-.4976	.0473	.1168	.3260
3	.0112	-.4968	.0946	.1216	.3489
4	.0168	-.4956	.1420	.1297	.3872
5	.0223	-.4939	.1893	.1409	.4408
6	.0279	-.4917	.2366	.1551	.5100
7	.0335	-.4890	.2839	.1723	.5949
8	.0391	-.4858	.3313	.1922	.6955
9	.0447	-.4821	.3786	.2148	.8121
10	.0503	-.4779	.4259	.2398	.9447
11	.0559	-.4732	.4732	.2671	1.0935
12	.0754	-.4530	.4530	.3768	1.1336
13	.0949	-.4268	.4268	.5004	1.1925
14	.1145	-.3945	.3945	.6258	1.2611
15	.1340	-.3562	.3562	.7410	1.3206
16	.1536	-.3119	.3119	.8347	1.3463
17	.1731	-.2616	.2616	.8980	1.3150
18	.1927	-.2052	.2052	.9245	1.2130
19	.2122	-.1428	.1428	.9111	1.0419
20	.2318	-.0744	.0744	.8579	.8220
21	.2513	-.0000	.0000	.7678	.5895

```
 STOP* 0
**********************************************************************
STPTIME VIRT REL ACT TRA CRM   FAULTS    INS    OUTS     RATE-P/S UC-E RL-E
  0.014   50  40  35  03  19       19     00     00        22.24 2.33 2.46


F683     STEP  WAIT  CORE      END     DISC      TIME    START  CODE  PROGRAM
           03  00.01    21   15*21*04    14     00.01 15*20*45 TERM
**********************************************************************
**********************************************************************
     TIME       TIME*CORE       CORE-USE     TIME*DISC      DISC-USE
     00.80          32.87            94%         80.17           11%
```

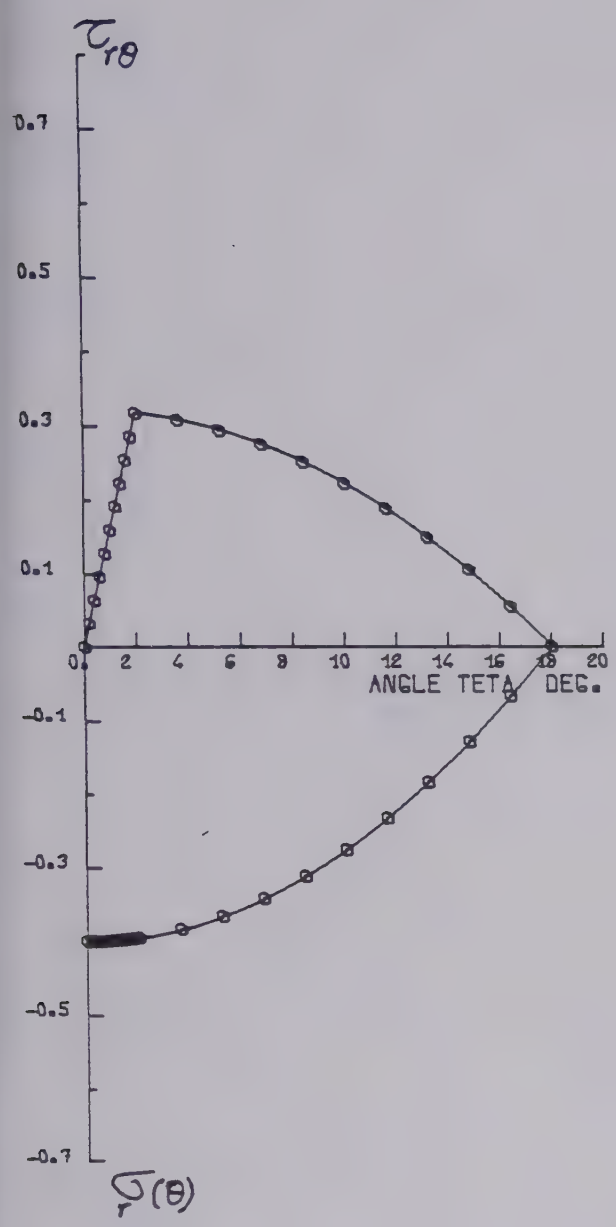


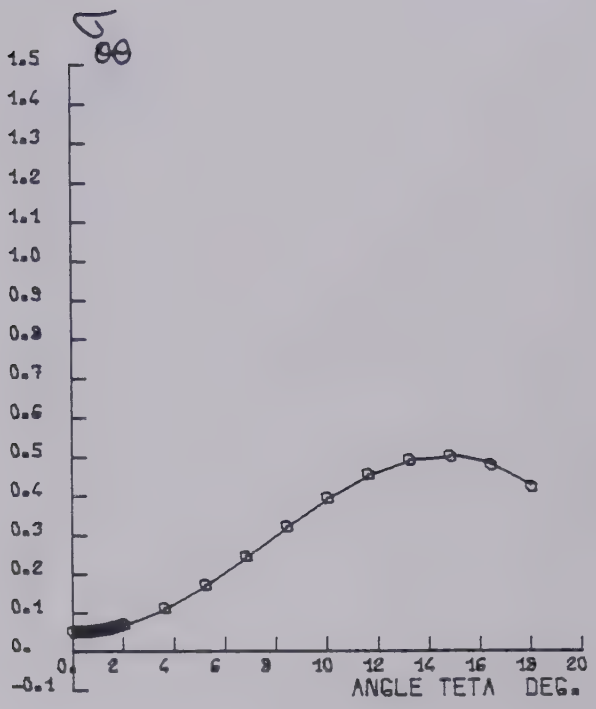




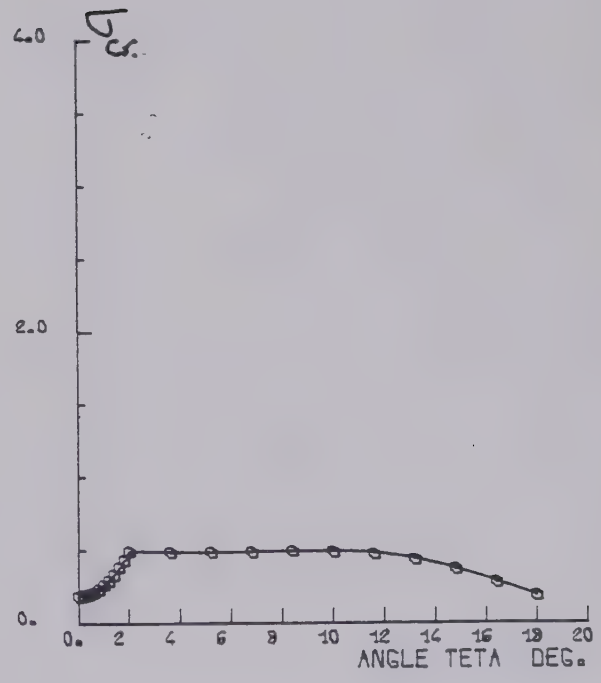
FROT = 0.6

COURBES 9

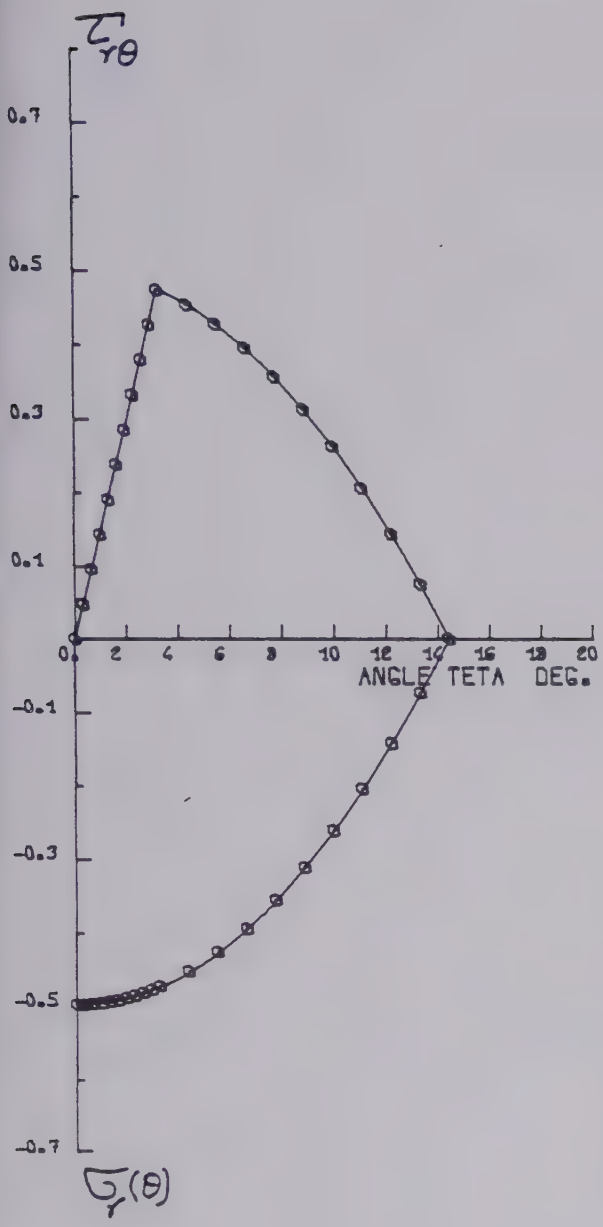


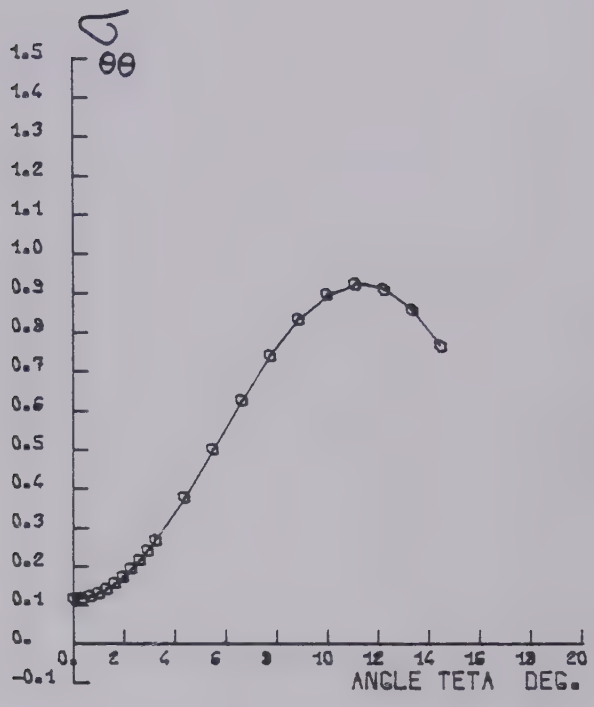


FROT = 0.8

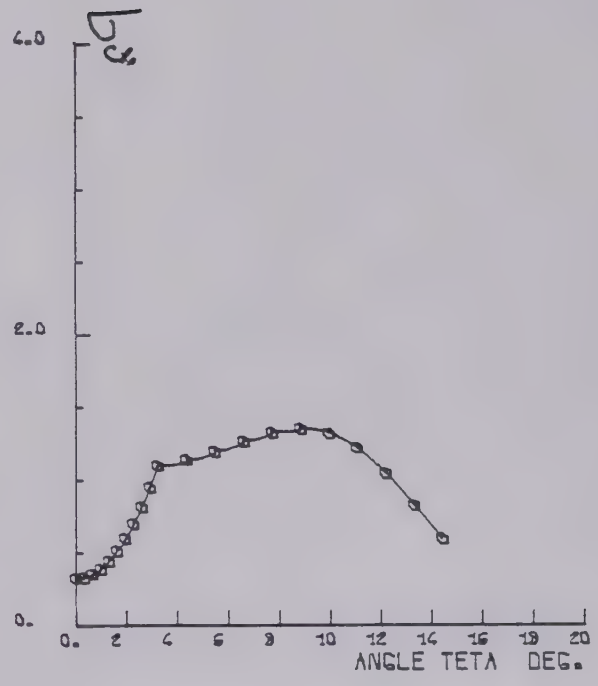


COURBES 10

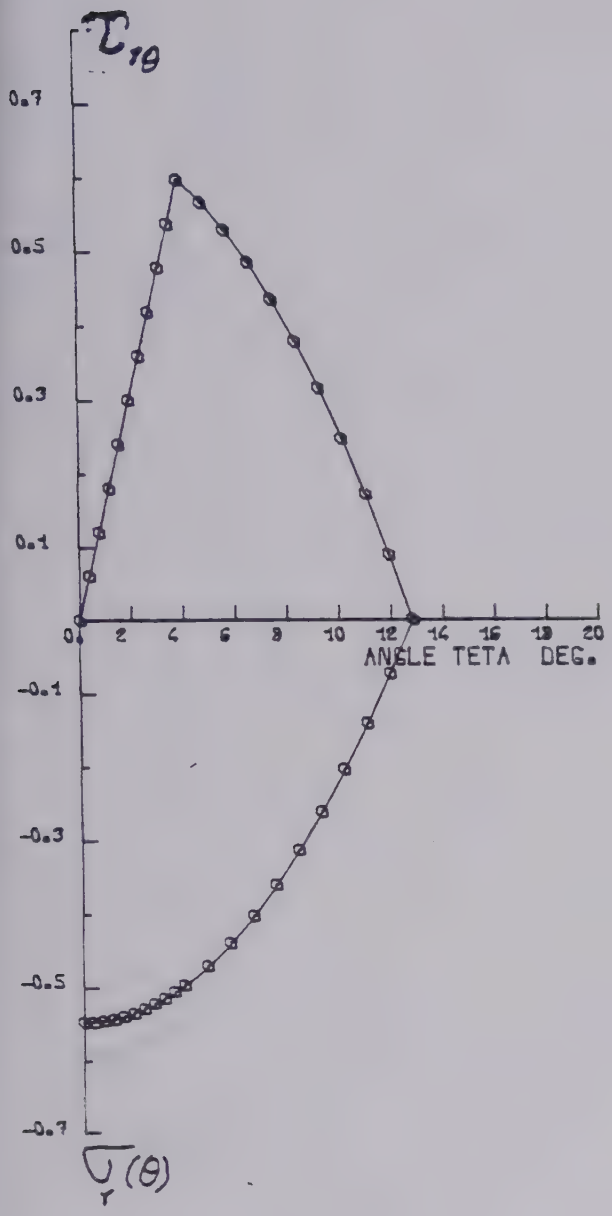


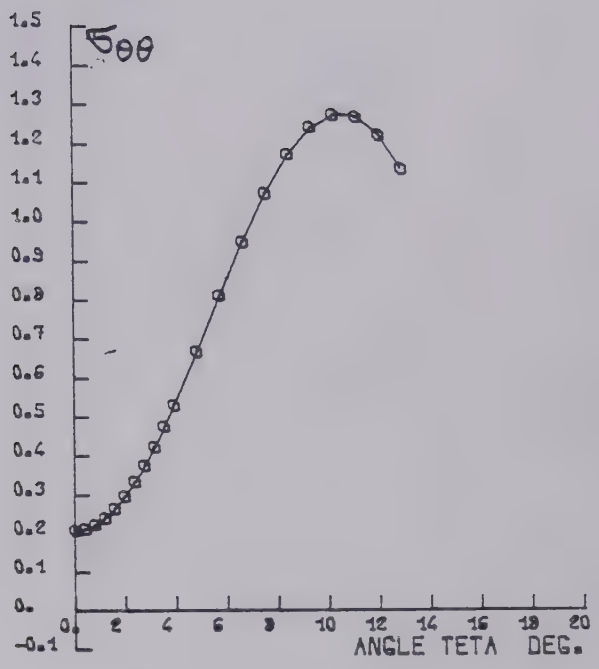


FROT = 1.0

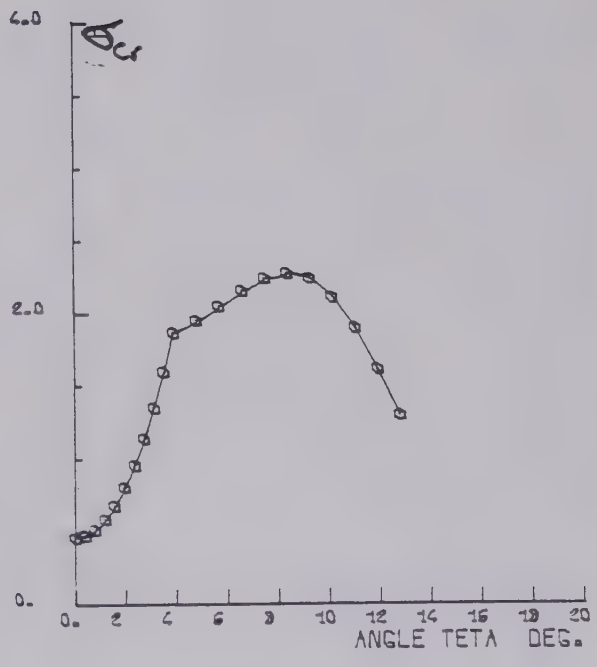


COURBES 11

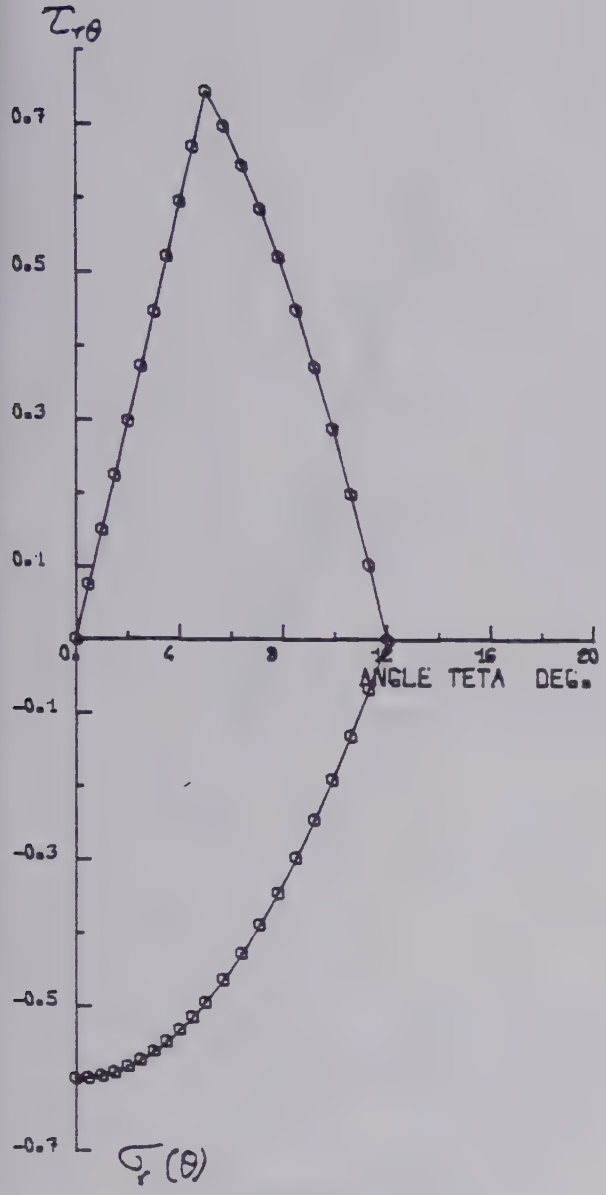


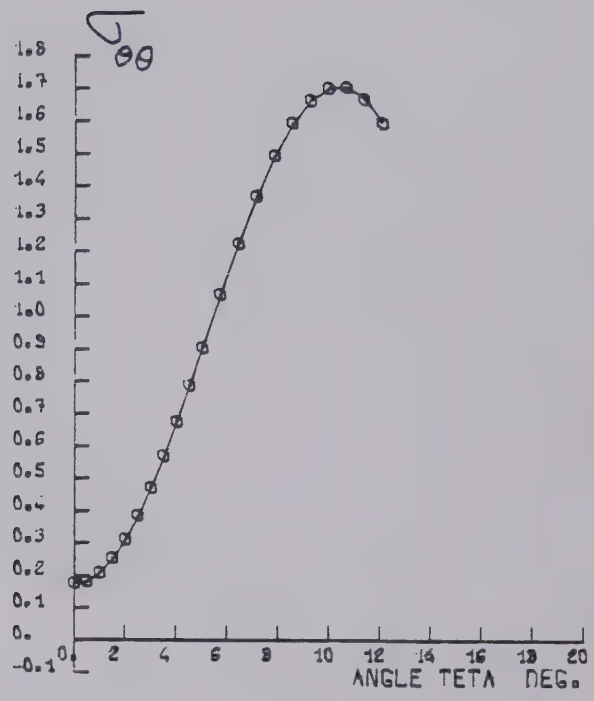


FROT = 1.2

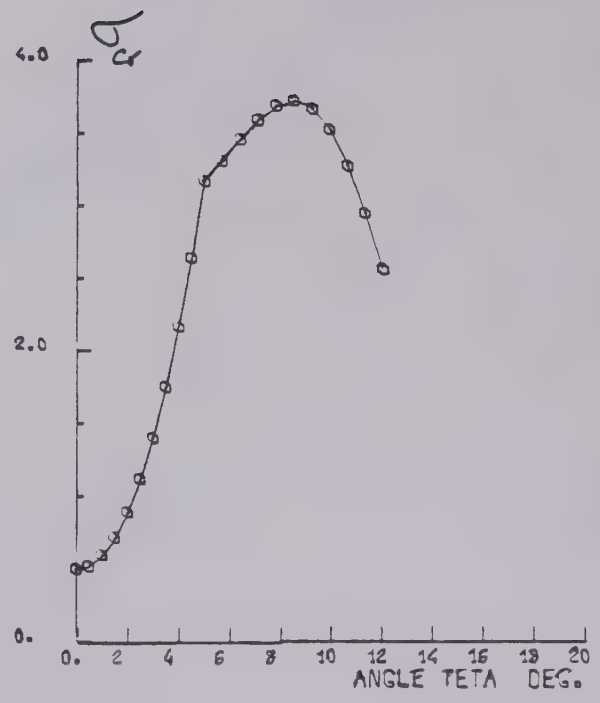


COURBES 12

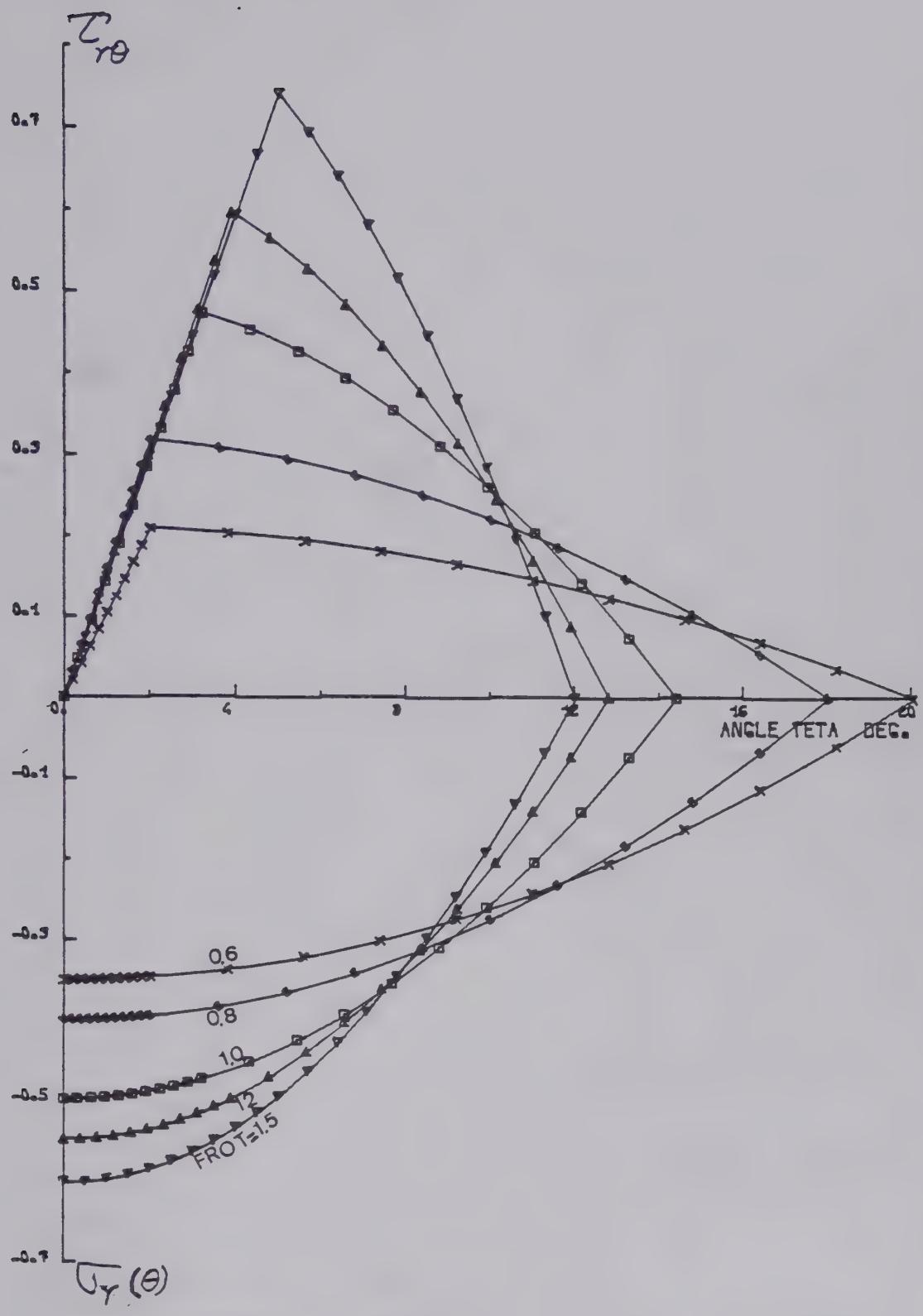




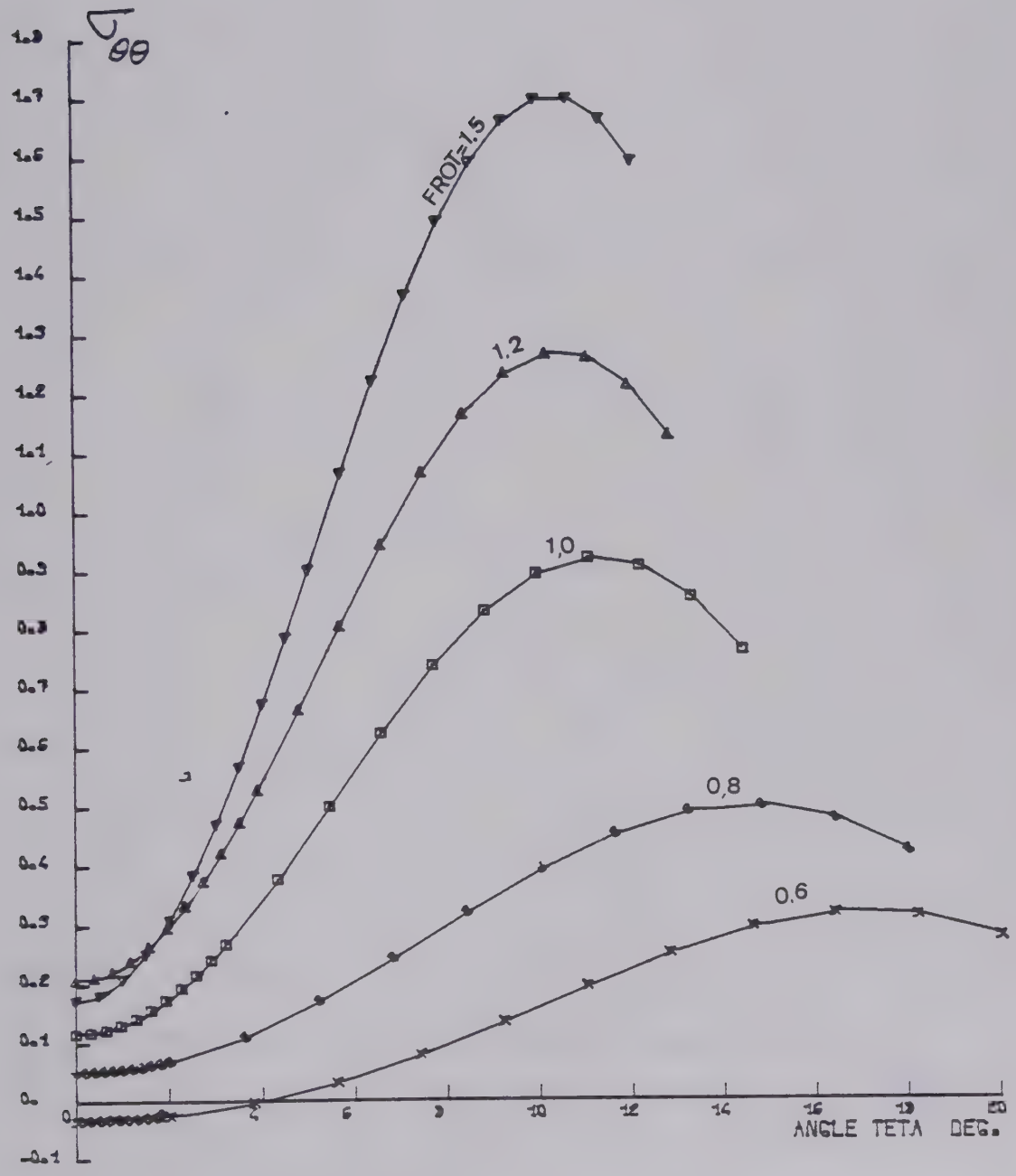
FROT=1,5



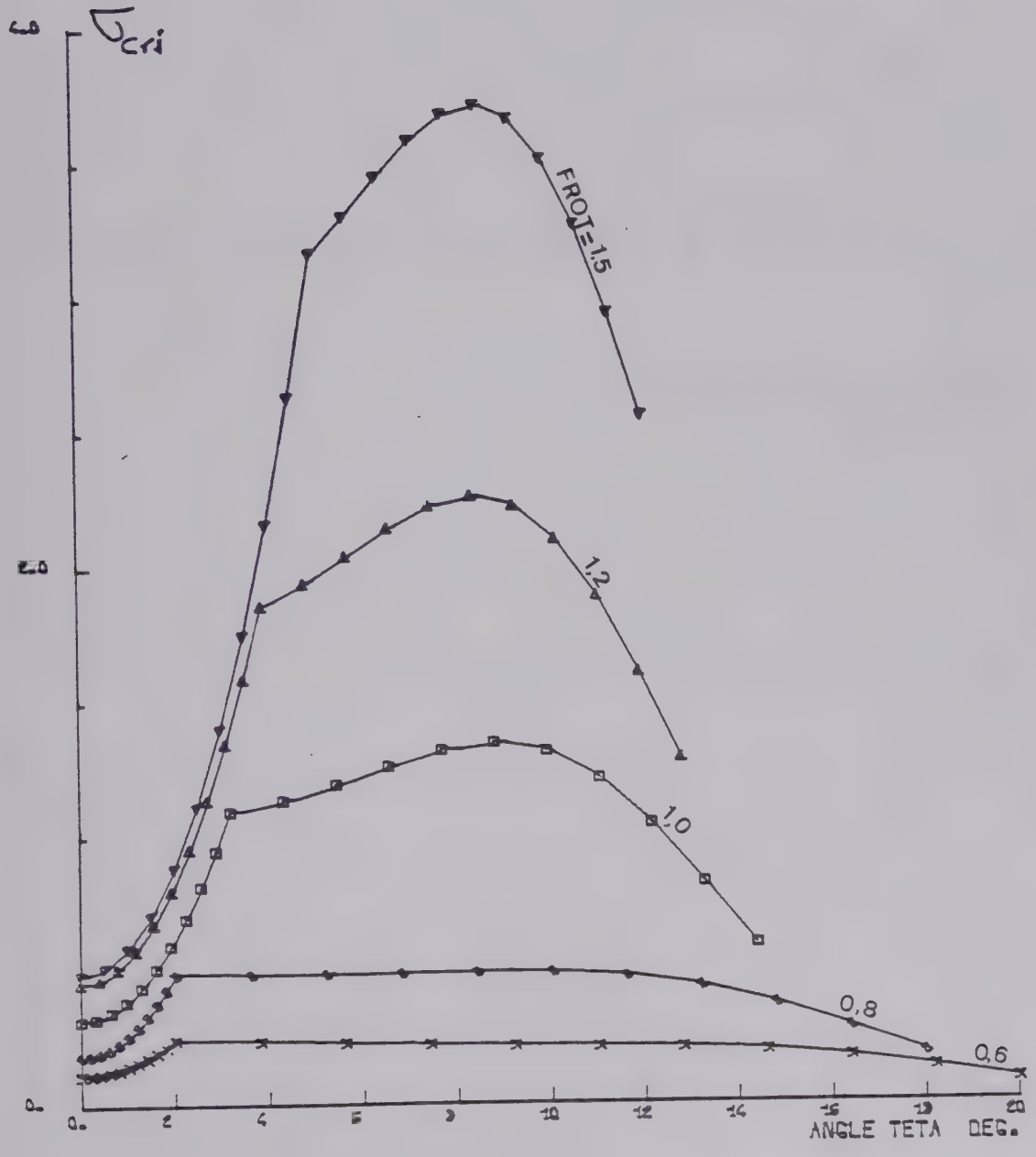
COURBE 13


$\tau_{r\theta}$
0.7
0.5
0.3
0.1
-0.1
-0.3
-0.5
-0.7
0
4
8
12
16
20
ANGLE TETA DEG.
0.6
0.8
1.0
1.2
FROT=1.5
$\sigma_r(\theta)$

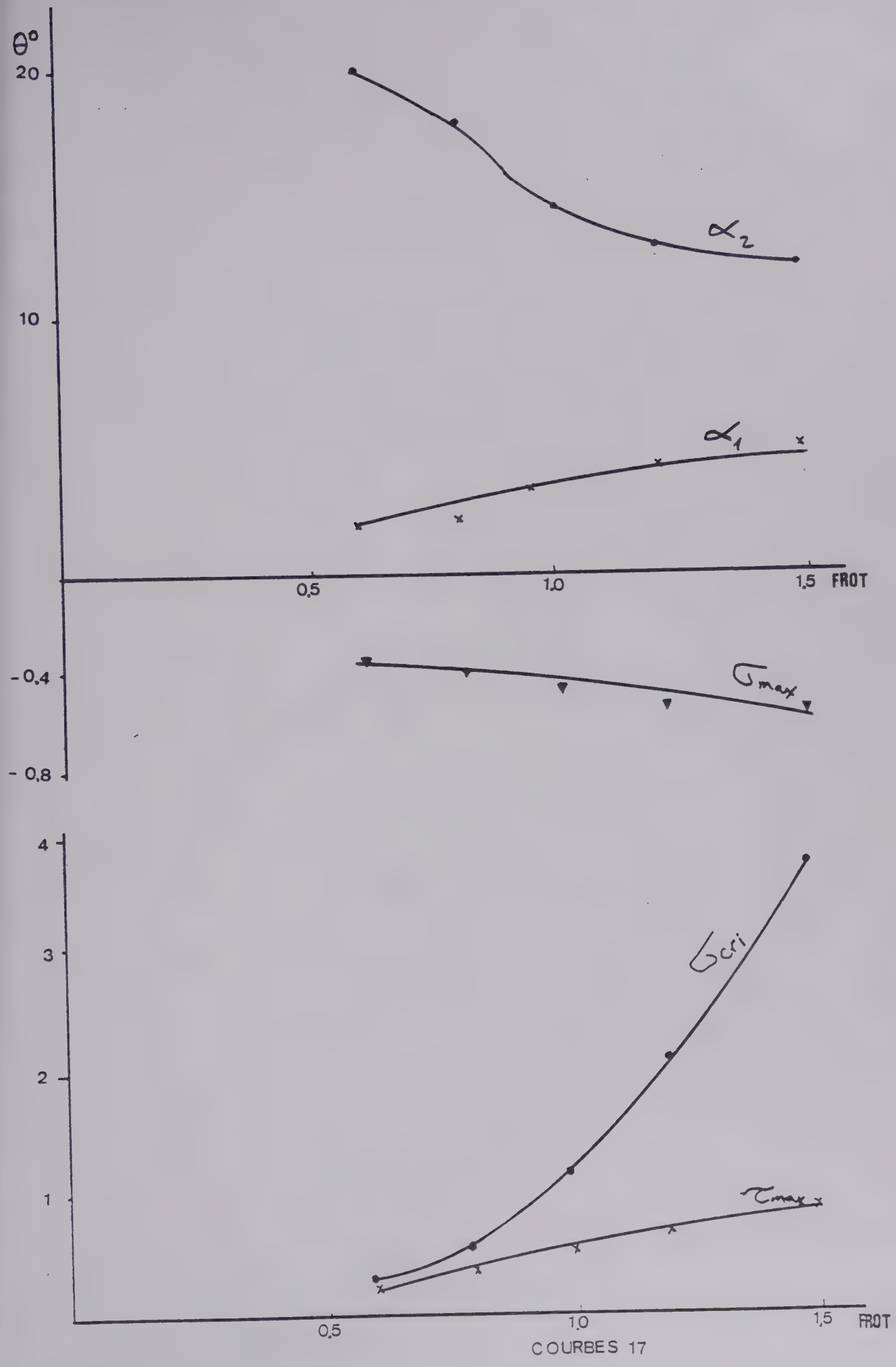
COURBES 14



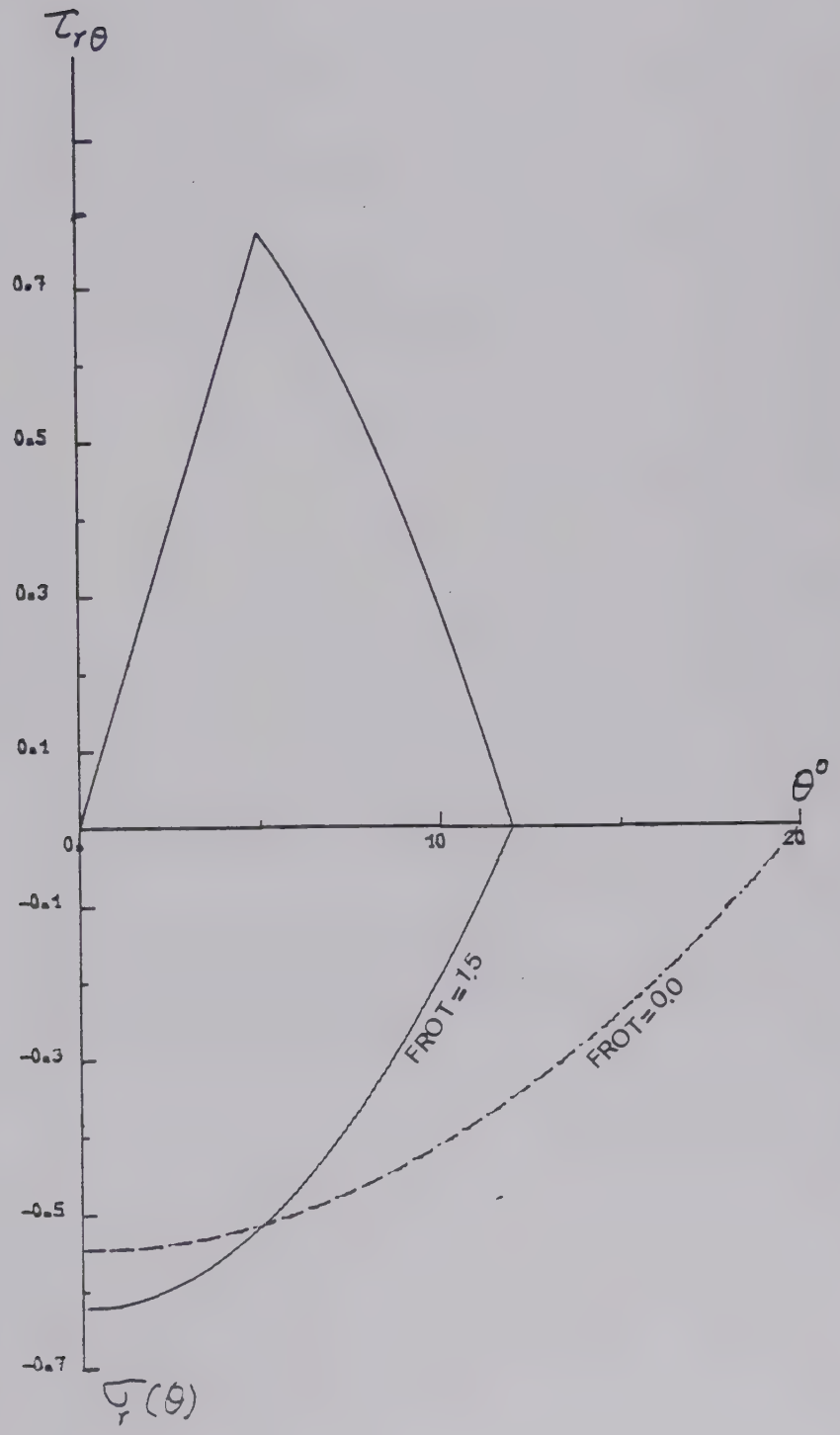
COURBES 15



COURBES 16



COURBES 17


$\tau_{r\theta}$
0.7
0.5
0.3
0.1
0.
-0.1
-0.3
-0.5
-0.7
θ^o
10
20
FROT=1.5
FROT=0.0
$\tau_r(\theta)$

COURBES 18

C H A P I T R E - V -

ANALYSE EXPERIMENTALE

-

1. - INTRODUCTION.

2. - DISPOSITIFS DE MESURE

A - Méthode extensométrique
A.1 - Résultats.

B - Méthode photoélasticimétrique
B.1 - Méthode utilisée et dispositif de mesure
B.2 - Résultats et conclusion.

CHAPITRE - V -

ANALYSE EXPERIMENTALE.

-

1. - INTRODUCTION.

Le contact traité dans ces expériences est le contact large d'une inclusion rigide dans une matrice déformable avec frottement et jeu, l'introduction de ce dernier ne modifie guère les calculs, il suffit d'écrire à la place de $U(R,O) = O$: $U(R_1O) = \varepsilon$

Toutes ces expériences ont été réalisées au Département de Génie Mécanique de l'INSA de Toulouse, sur un modèle (figure 13) comportant deux plaques minces de 5 mm d'épaisseur et de 250 x 250 mm de dimensions extérieures, les différents noyaux cylindriques sont en acier XC 38 et les deux plaques en aluminium (A5) choisi pour son homogénéïté. Le diamètre du trou, parfaitement cylindrique a été usiné à la cote de 70^{+O}_{-}

La détermination précise des caractéristiques élastiques du matériau étant essentielle quant à l'interprétation des résultats par rapport à la théorie, nous avons mesuré le module d'élasticité et le coefficient de poisson ν en déterminant

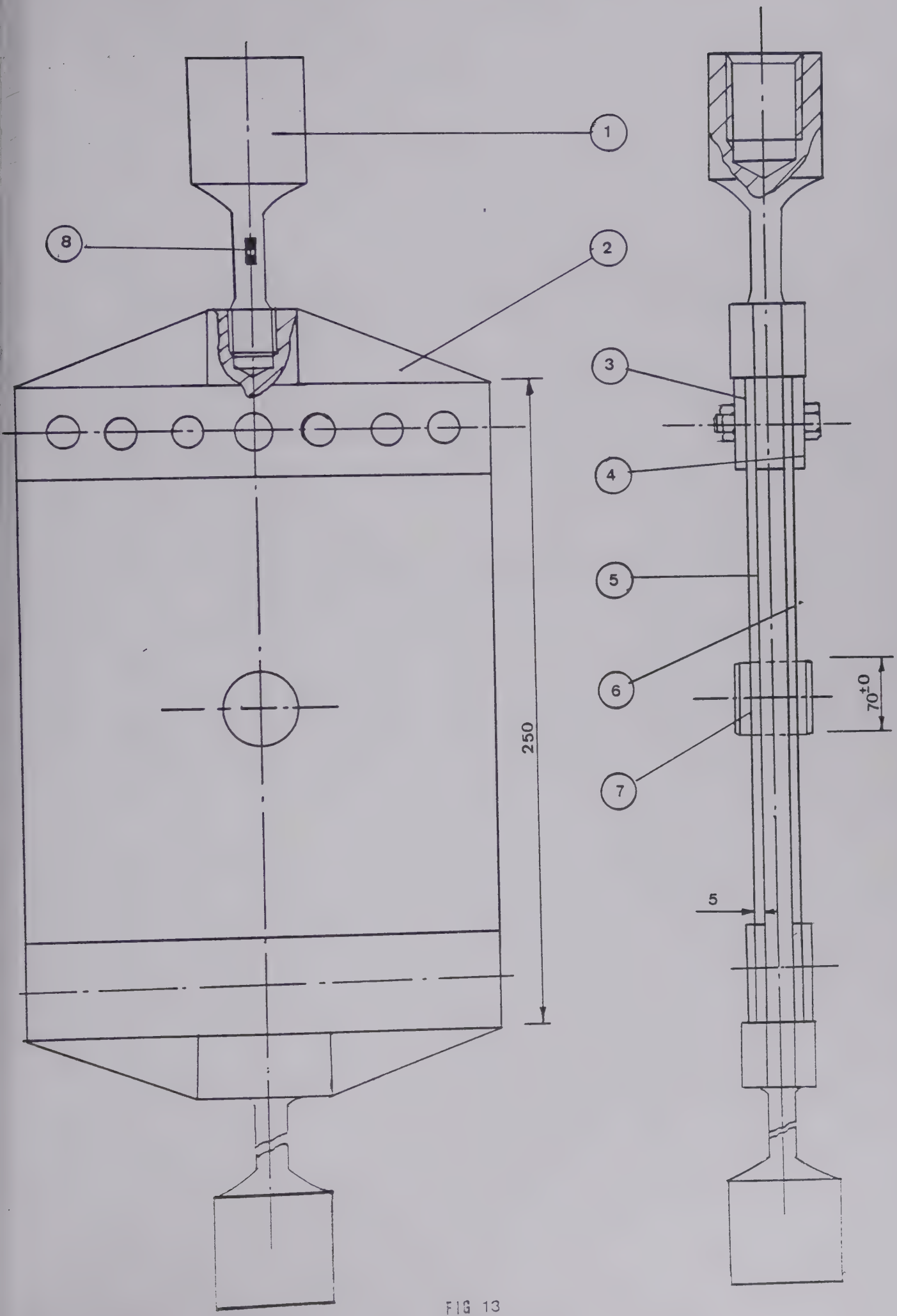


FIG 13

Rep.	Désignation	Matière	Etat
1	Attache	XC 35	
2	Etrier	A 40	
3	Contre plaque	XC 35	
4	Contre plaque	XC 35	
5	Plaque	A 5	
6	Plaque	A 5	
7	Axe	AU 4 G	Rectifié
8	Jauge de vérification de la charge	(EA06 250 B G 120)	

le temps de propagation des ondes ultrasonores. La méthode utilisée pour la mesure des vitesses est appelée "superposition des échos" (pulse écho overlap). C'est lorsqu'on étudie les propriétés élastiques des solides et des liquides la voie la plus utilisée de nos jours à cause de sa grande précision (GAR). Lesmesures ont été faites sur un appareil réalisé au département de physique de l'INSAT.

On trouve pour le module d'élasticité longitudinal

$E = 6175{,}88$ daN/mm^2, et pour le coefficient de Poisson $\nu = 0.331$.

Pour faire varier le jeu nous avons successivement utilisé cinq noyaux d'Acier de diamètres :

$70^{-0.02}$, $70^{-0.04}$, $70^{-0.12}$, $70^{-0.2}$, $70^{-0.38}$

Le chargement des plaques est parfaitement symétrique et le mode de liaison par pions de cisaillements multiples ajustés et par adhérence garantit une tension sensiblement uniforme aux bords supérieurs et inférieurs.

L'application des efforts a été réalisée sur une machine de traction classique (photo 1).

2. - DISPOSITIFS DE MESURE.

a - Méthode extensométrique.

Pour avoir directement accès à l'état des contraintes nous avons utilisé des rosettes à trois jauges superposées à 45° celles-ci sont collées sur la plaque, au bord du trou suivant le dispositif représenté (figure14).

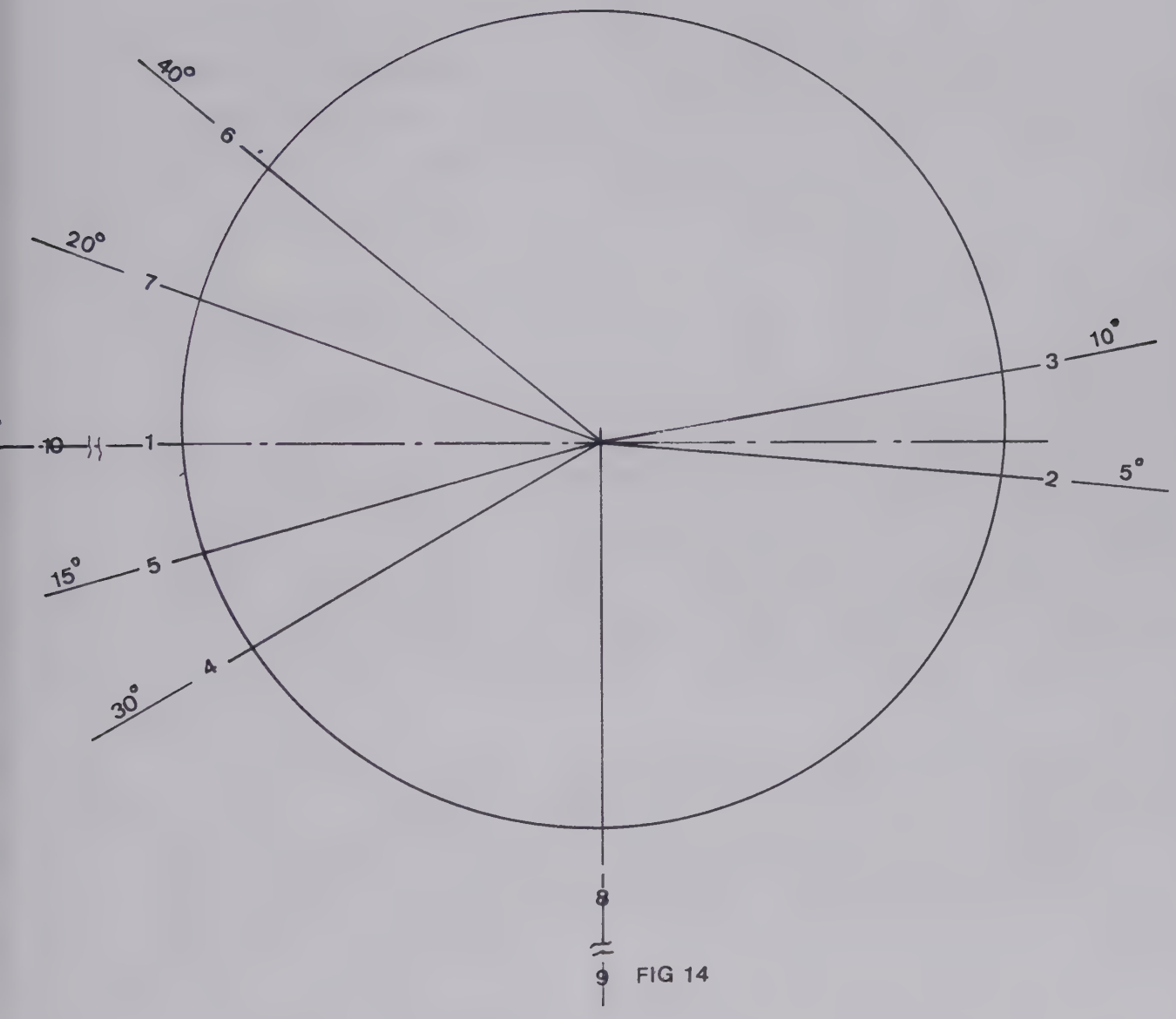


FIG 14

Le centre de la rosette, qui définit la position du point de mesure, se trouve situé à 2 mm du bord du trou. Pour obtenir un nombre de points de mesures suffisants la disposition choisie utilise la double symétrie du modèle expérimental.

Pour chaque noyau nous avons utilisé les charges successives suivantes P = 3000, 4000, 5000, 5800 daN

Pour chaque charge une série de mesures des déformations suivant les trois directions des jauges a été réalisée et un programme de calcul effectué sur microcalculateur nous a permis de calculer les deux contraintes principales (σ_1, σ_2) et leur direction (2α) ainsi que les composantes normales et tangentielles au bord du trou.

3. - RESULTATS.

Nous n'avons pas pu réaliser des mesures significatives que pour les jeux les plus faibles c'est à dire plus précisément pour les jeux relatifs 0.000057, 0.000114. Pour les jeux relatifs plus importants la déformation de l'alésage pour la charge maximum qu'il était possible d'appliquer, sans risque de dépasser la limite élastique, compte tenu de l'état de contraintes dû à la présence d'un trou dans la plaque, reste inférieur au jeu.

Donc pour les deux jeux 0.02 et 0.04 nous avons réalisé quatre chargements et les points expérimentaux correspondants aux mesures des déformations des dix rosettes ont été répartis sur les courbes théoriques correspondants au modèle de mesure (figures **19**, **20**).

Le tableau ci-après donne les valeurs théoriques et expérimentales des contraintes et l'erreur entre ces deux valeurs.

Jeu = 0.02 mm - charge 5800 daN				Jeu = 0.04 mm -Charge 5800 daN		
θ °	0°	5°	10°	0°	5°	10°
σ théorique daN/mm2	4.391	4.325	4.176	4.971	4.905	4.722
σ exp. daN/mm2	4.836	5.391	5.407	5.374	5.647	5.522
Erreur % $\frac{\sigma_{ex} - \sigma_{th}}{\sigma_{ex}}$ %	9.2 %	19.7 %	22.8 %	7.5 %	13 %	14.5 %

b - Méthode Photoélastique.

Nous avons effectué toute une série de mesures par photoélasticimétrie par réflexion souvent appelé procédé "Photo Stress". Cette méthode présente l'avantage de permettre des mesures sur le système réel et permet d'éviter ainsi le problème de similitude complète.

Pour notre part nous avons utilisé le même dispositif qu'en extensométrie à jauges de contraintes, la plaque de matériau photoélastique étant collée sur la face arrière du modèle, les deux séries de mesures ont pu être réalisées simultanément (photo 2).

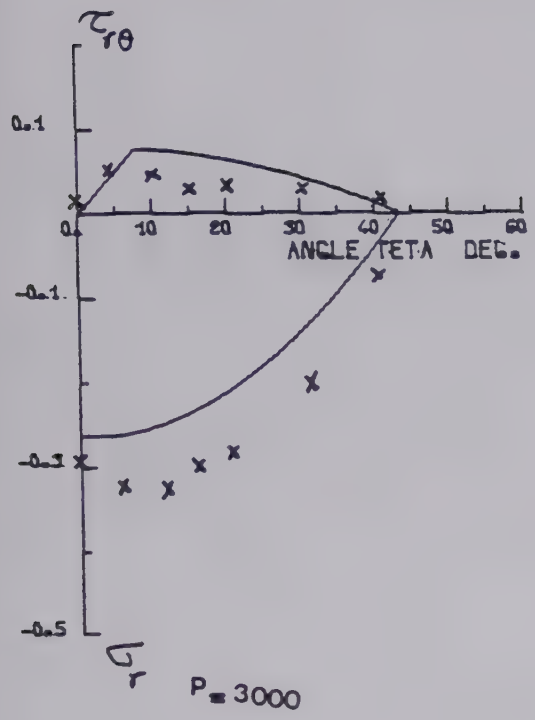
L'enregistrement des résultats a été fait par photographie en diapositives couleur dont on donne 1 exemple (photo 3). Ceci nous a permis par projection de tracer des isochromes et les isoclines sur des diagrammes à plus grande

échelle améliorant ainsi sensiblement la précision (planche 1). Comme il est facile de le constater on obtient des résultats intéressants en ce qui concerne la répartition des contraintes dans l'ensemble de la plaque ce qui qualitativement confirme les essais réalisés par Frochet [FR] en photoélasticité classique.

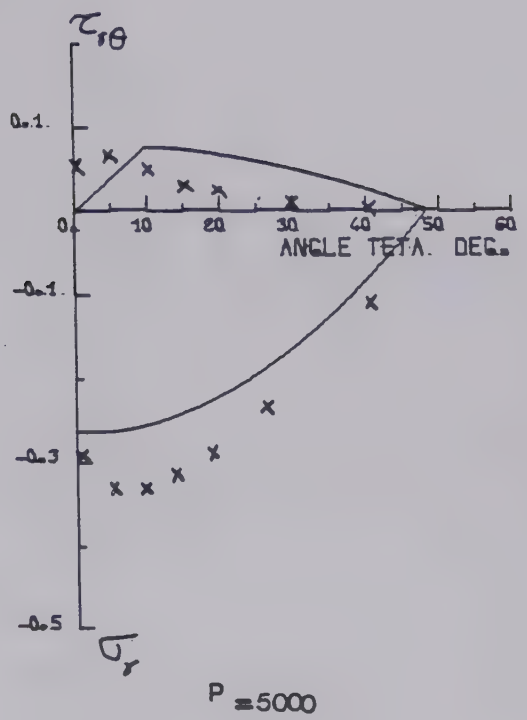
Si la présence de l'inclusion modifie l'état de contrainte au voisinage immédiat du bord du trou, son influence dans le reste de la plaque n'est pas visible et de toute façon non significative.

°°°

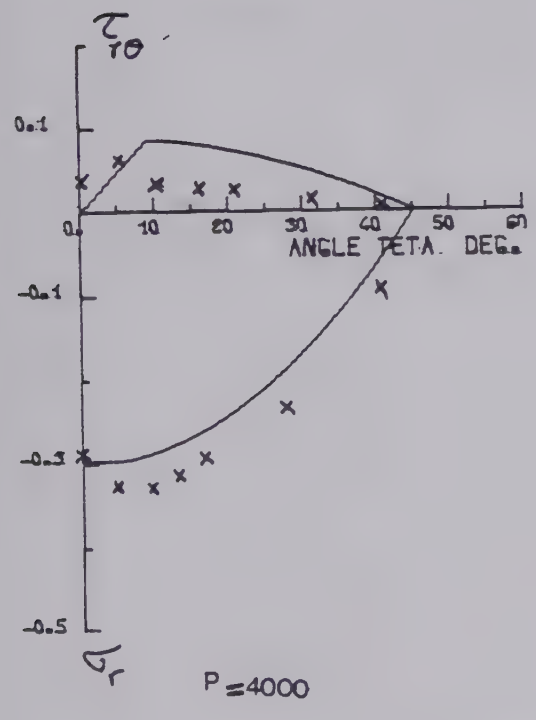
JEU = 0,02



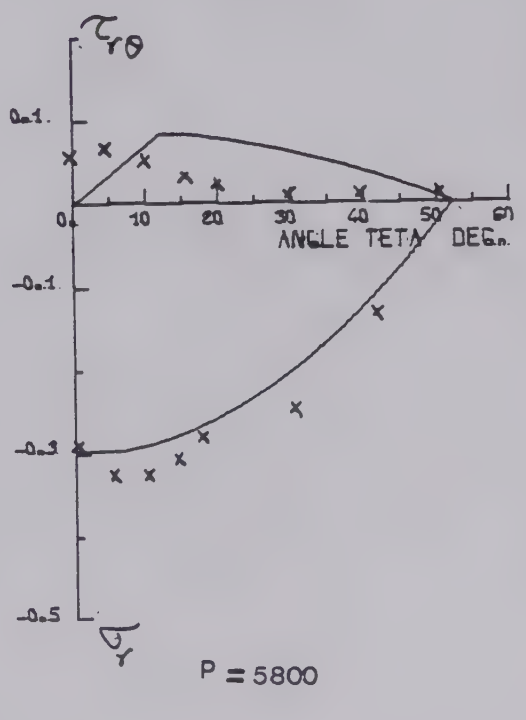
P = 3000



P = 5000



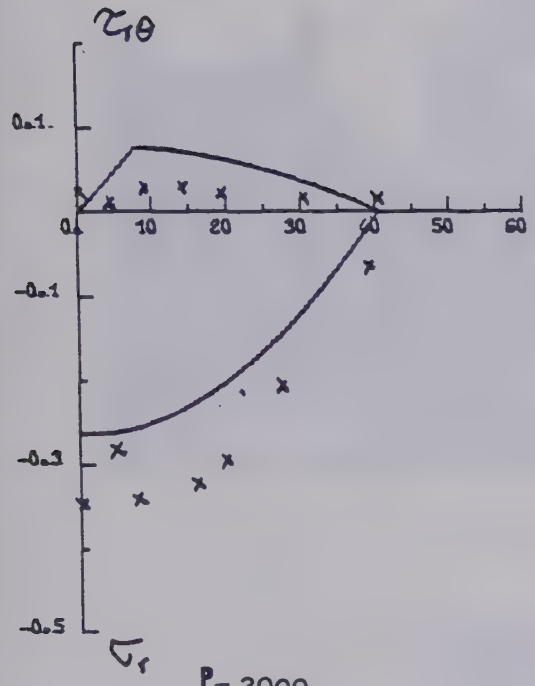
P = 4000



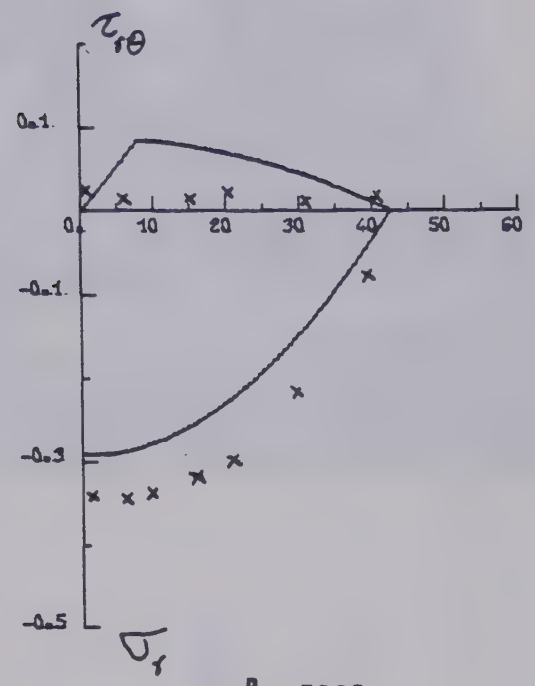
P = 5800

COURBES 19

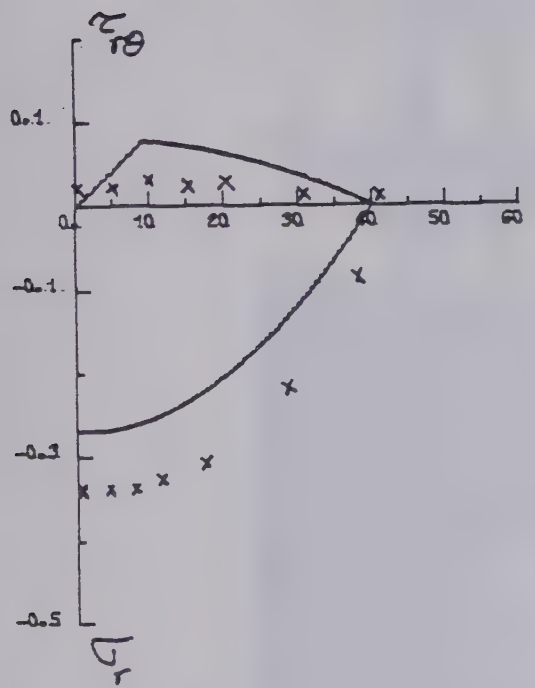
JEU = 0.04



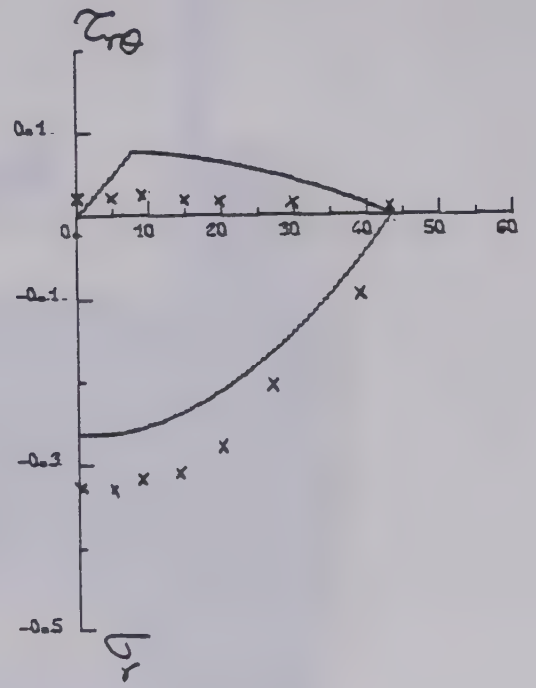
P = 3000



P = 5000



P = 4000



P = 5800

COURBES 20

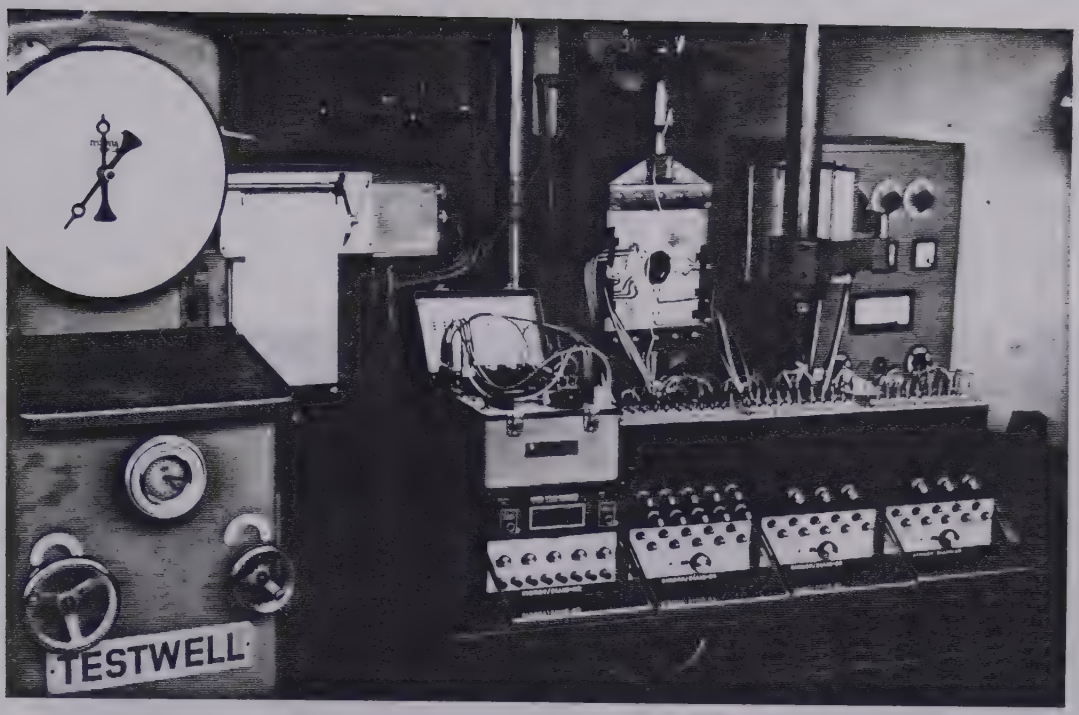


PHOTO 1

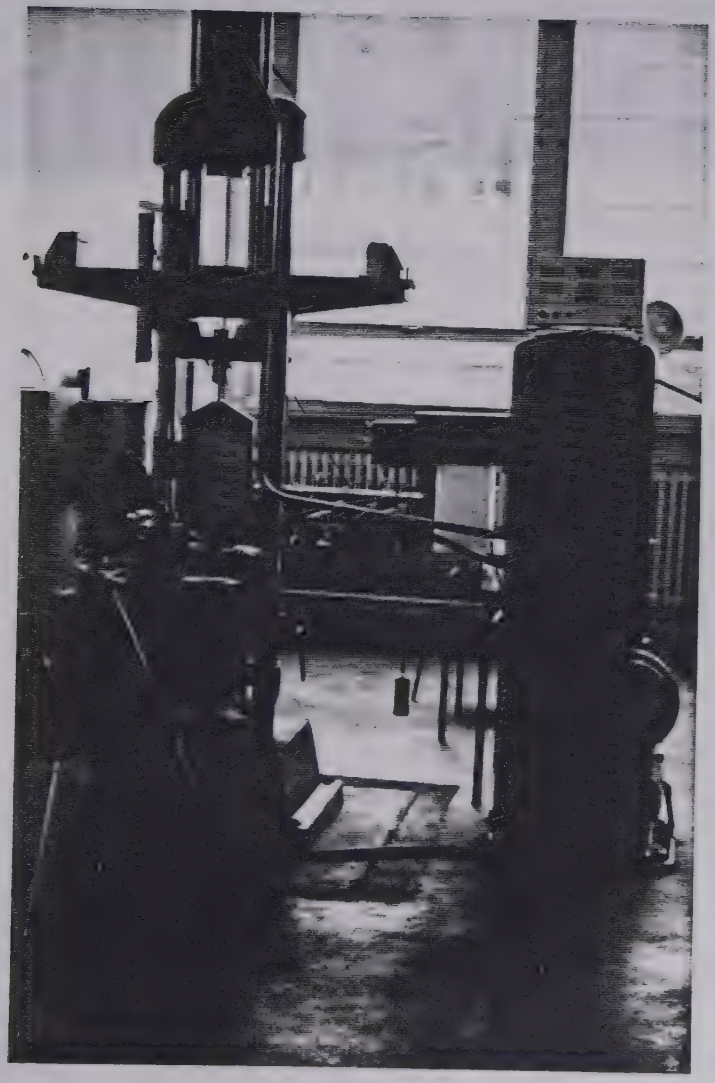


PHOTO 2

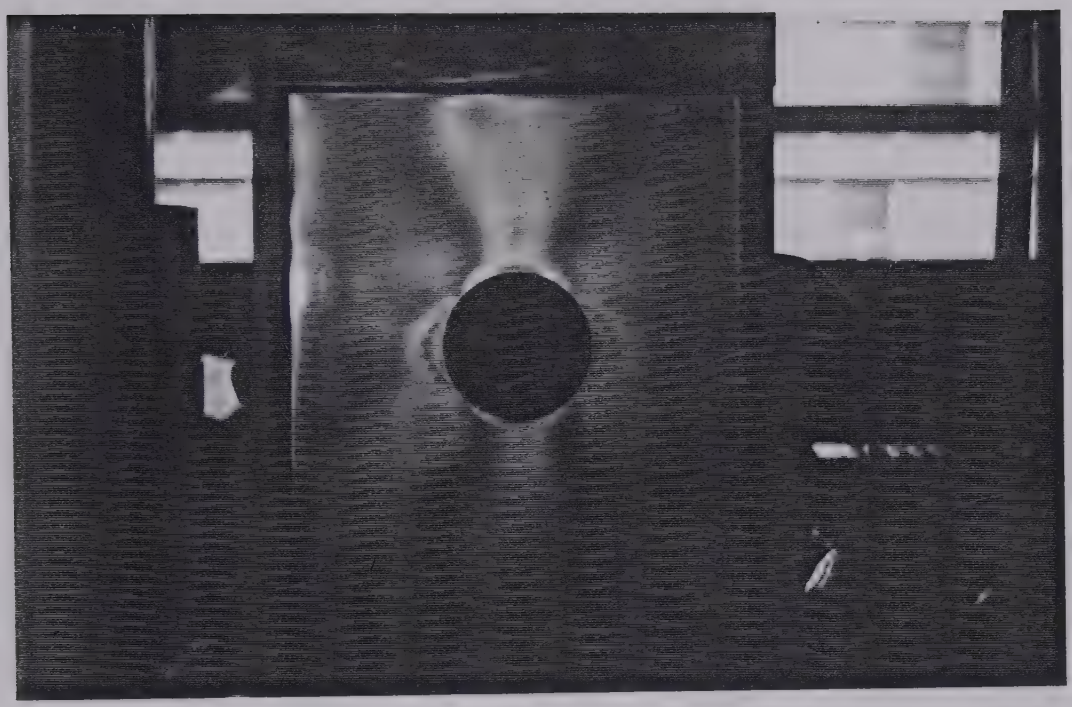
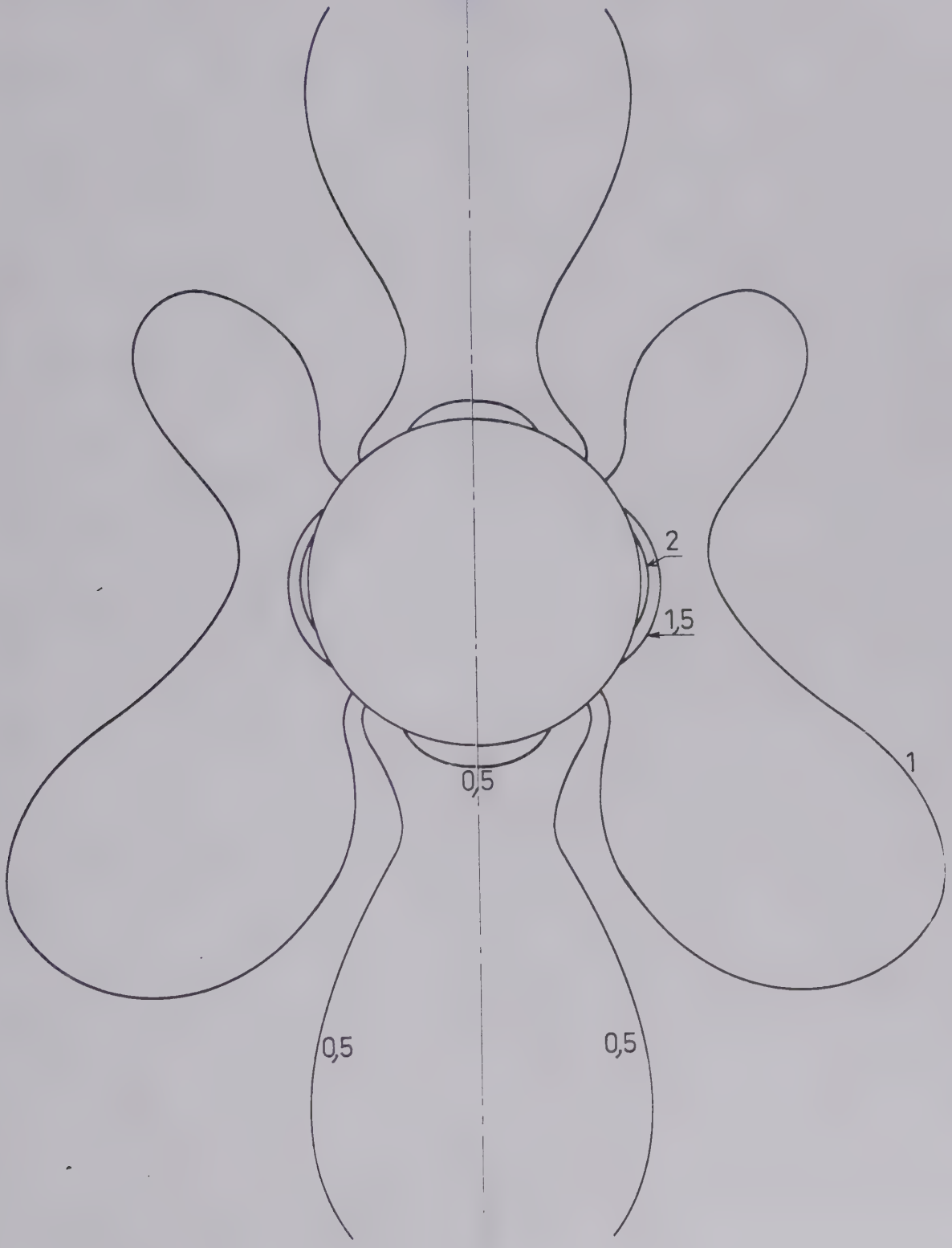
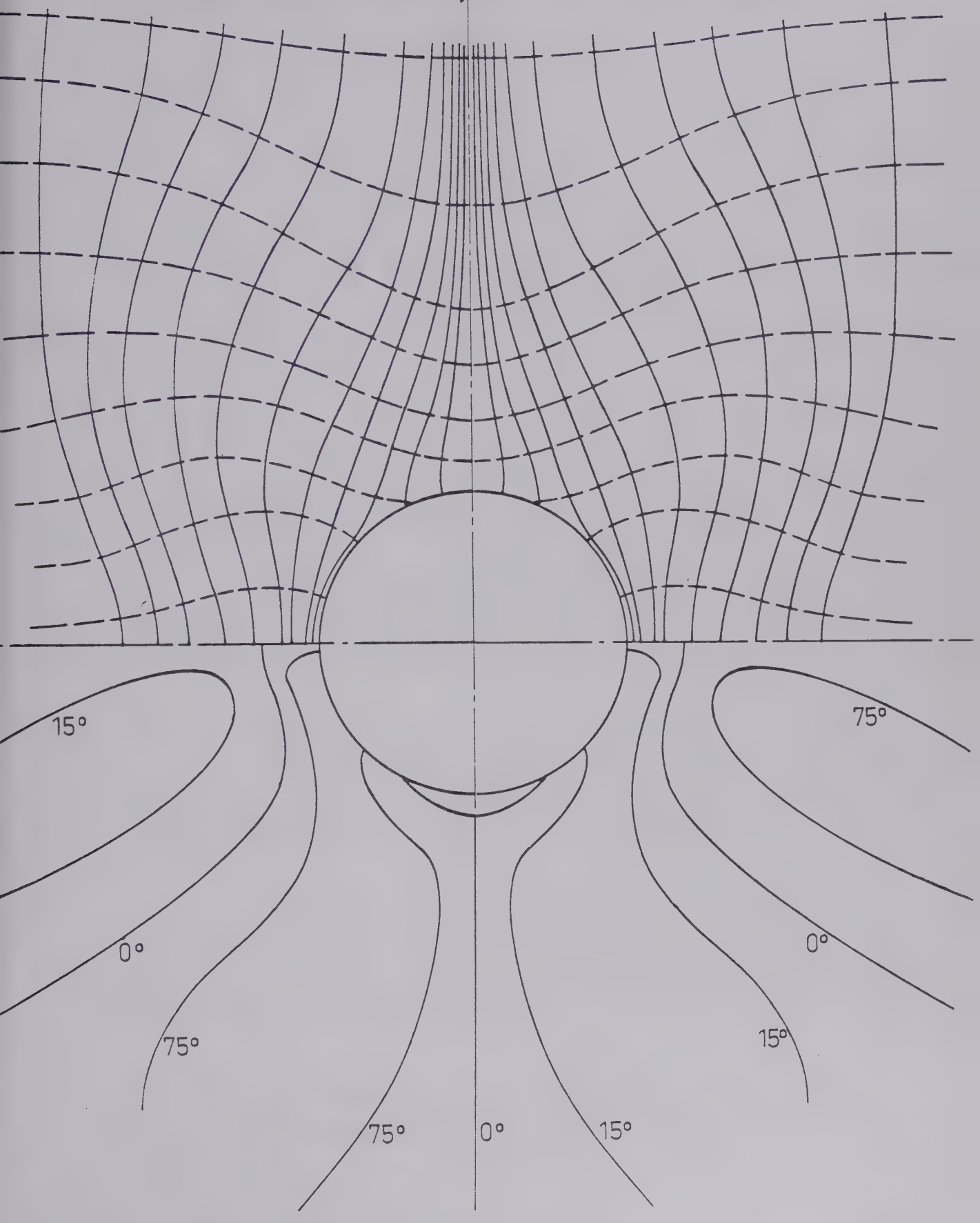


PHOTO 3

AXE N°1 J = 0,04 F = 5800 daN



AXE N° 1 J = 0,04 F = 5800 daN



C O N C L U S I O N

L'objet de ce travail consistait à étudier l'influence du frottement sec dans deux cas de contacts larges :

l'un spécifique au génie mécanique par exemple à propos des paliers secs, l'autre relatif au génie civil au sujet de l'influence des agrégats dans la pâte de ciment.

Ces deux études ont été conduites par des méthodes théoriques et numériques similaires en partant, en ce qui concerne les résultats, notre attention de l'influence du frottement sur le critère de Von Mises et ses conséquences.

La partie théorique a pour support la méthode des potentiels complexes bien adoptée aux problèmes plans et nous avons été conduits à un problème d'optimisation résolu, à notre sens, de façon satisfaisante par une méthode de quadratisation.

Ces techniques nous ont permis de distinguer les zones de glissement et d'adhérence et de constater de façon

relativement précise l'influence du frottement sur l'état des contraintes et sur la fonction seuil de Von Mises. Dans tous les cas le point le plus défavorable vis à vis de ce seuil n'est pas situé sur l'axe de symétrie du système mais au voisinage du point qui sépare la zone d'adhérence et de glissement ces résultats ont été confrontés à l'expérience et l'accord avec la théorie est bon : environ 25 % d'erreur.

A titre d'orientation, il reste toujours dans le même cadre appliqué à étudier l'influence du frottement dans les problèmes tridimensionnels : axes de pistons, agrégats, sphériques, etc...

D'autre part, la méthode proposée n'est qu'une approximation. L'introduction du frottement dans les problèmes de contact est encore une question ouverte et même la méthode des éléments finis reste à exploiter de façon rigoureuse dans ce domaine.

B I B L I O G R A P H I E

1. [AS] - 81 - P. ASTRE
"Contribution à l'étude de certains types de contacts larges".
Thèse Docteur ès Sciences, Toulouse.

2. [BA] - 81 - A. BASCOUL et J. C. MASO
"Influence des gradients de contraintes ou de déformations sur le seuil d'écoulement plastique d'un acier".
Journal de Mécanique appliquée, vol. 5, n° 4, 1981.

3. [CA] - 82 - G. CARRACCI
"Conception et optimisation de liaisons par Boulons précontraints"
Mémoire d'obtention du diplôme d'ingénieur C.N.A.M. Toulouse.

4. [CAL] - 69 - H. CALVET
"Etude sur modèle plan des déformations sous charge autour d'un granulat"
Colloque Géotechnique, Toulouse.

5. [CO] - 64 - J. COURBON
"Résistance des matériaux"
Tome 1, - DUNOD.

6. [DA] - 58 - P. DANTU
"Etude des contraintes dans les milieux hétérogènes"
ANNALES I.R.B.T.P., n° 121.

7. [FA] - 56 - J. FARRAN
"Contribution minéralogique à l'étude de l'adhérence entre les constituants hydratés des ciments et les matériaux enrobés".
Thèse Docteur ès Sciences, Toulouse.

8. [FR] - 57 - M. M. FROCHT
"Photoelasticity"
John WILEY and Sons. vol. 1 et 2.

9. [GA] - 76 - R. GAERTNER
"Contribution à la résolution des problèmes de contact élastique avec frottement".
Thèse de Docteur Ingénieur - Univ. Claude Bernard Lyon.

10. [GAR] - 77 - J. P. CARRIGUE
"Communication personnelle".

11. [GE] - 62 - P. GERMAIN

"Mécanique des milieux continus"
Masson.

12. [GL] - G. M. L. GLADWELL
"The contact Problem for a Rigid inclusion pressed between two dissimilar elastic half planes"
Transaction of ASME Vol. 48, 1981.

13. [GL] - G. M. L. GLADWELL
"A note on a three part contact problem, Chebyshe ploynomials and elliptic integrals"
International journal of engineering Science.
Vol. 1. 1980;

14. [GO] - 77 - M. GODET - D. PLAY
"Design of high performance dry bearings"
WEAR - Vol. 41, n° 1.

15. [KO] - 78 - I. KOHEN
"Effet des troisièmes corps, des jeux radiaux et des degrés de liberté sur les champs de contraintes dans un contact large (galet - secteur)
Thèse de Docteur Ingénieur - Univ. Claude Bernard Lyon.

16. [LE] - 78 - S. LEGRAS
"Algorithmes et programmes d'optimisation"
MASSON.

17. [LO] - 74 - M. LORRAIN
"Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents. Application aux bétons"
Thèse Docteur ès Sciences, Toulouse.

18. [LOP] - 78 - G. LOPPIN
"Poinçonnement d'un support élastique et applications numériques"
Journal de Mécanique - vol. 17, n° 3.

19. [MA] - 67 - J. C. MASO.
"La nature minéralogique des agrégats, facteur essentiel de la résistance des bétons à la rupture et à l'action du gel".
Thèse Docteur ès Sciences, Toulouse.

20. [MI] - 68 - L. M. MILNE - THOMSON
"Systèmes élastiques plans".

21. [MO] - 75 - C. MONOT
"Identification des paramètres d'un système intégro-différentiel".
Thèse Docteur ès Sciences. Nancy.

22. [MU] - 63 - M. I. MUSKHELISHVILI
"Some basic problems of the mathematical theory of elasticity".
P. Noordhoff

23. [RA] - RABUT
"Calcul numérique"
Polycopie INSAT.

24. [RO] - 79 - G. ROMEU
"Limite de résersibilité d'un modèle élémentaire de matériau granulaire cohérent: Cas où les premières irréversibilités se produisent dans l'inclusion"
Thèse Docteur Ingénieur - Toulouse.

25. [SO] - 68 - L. SOLOMON.
"Elasticité linéaire".
Masson et Cie.

26. [SU] - 78 - SUQUET
"Sur les équations de la plasticité"
Journal de Mécanique Vol. 17, n° 3, 1978.

27. [VI] - B. VILLECHAISE
"Etude bidimensionnelle des contacts larges entre domaines élastiques finis"
Thèse de Docteur Ingénieur
Univ. Claude Bernard, Lyon 1981.

Autorisation de Soutenance accordée

Toulouse le 26/9/1983

Le Directeur
Institut National des Sciences Appliquées